XIANXING GUOCHENG DE RUOGAN JIXIAN LILUN JIQI YINGYONG

线性过程的若干极限理论及其应用

李云霞 著



XIANXING GUOCHENG DE
RUOGAN JIXIAN LILUN JIQI YINGYONG


ISBN 978-7-308-08121-4
9 787308 081214 >
定价：35.00元

XIANXING GUOCHENG DE RUOGAN JIXIAN LILUN JIQI YINGYONG

线性过程的若干极限理论及其应用

■ 李云霞 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性过程的若干极限理论及其应用 / 李云霞著. —
杭州：浙江大学出版社，2010.11
ISBN 978-7-308-08121-4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李… Ⅲ.①线性系统理论—研究
Ⅳ.①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 219458 号

线性过程的若干极限理论及其应用

李云霞 著

责任编辑 徐 静
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版 杭州中大图文设计有限公司
印　　刷 杭州杭新印务有限公司
开　　本 710mm×1000mm 1/16
印　　张 13.75
字　　数 290 千
版 印 次 2010 年 11 月第 1 版 2010 年 11 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-08121-4
定　　价 35.00 元

作者简介

李云霞，2005年毕业于浙江大学数学系，获概率论与数理统计专业博士学位。同年，进入浙江财经学院数学与统计学院任教，先后获财院“高质量论文”奖，“优秀教师”的称号以及“浙江财经学院科研成果奖”一等奖等。2006年，破格晋升为副教授，并被推选为“浙江财经学院优秀中青年骨干教师”和“中青年学科带头人”，入选浙江省“新世纪151人才工程”第三层次培养人员，入选2007年度浙江省高等学校优秀青年教师资助计划。近五年来，在国内、国际重要期刊上发表十几篇学术论文，多数被SCI收录，如 *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *Metrika*, *Statistics and Probability Letters*, *Acta Mathematics Sinica-English Series*，等。主持国家自然科学基金项目、教育厅科研项目等，并参与多项国家自然科学基金项目、国家社科基金项目、浙江省社科项目等建设。

序　言

概率论是从数量上研究随机现象的规律性的学科．它在自然科学、技术科学、管理科学中都有着广泛的应用，因此从 20 世纪 30 年代以来，发展甚为迅速，而且不断有新的分支学科涌出．概率极限理论就是其主要分支之一，也是概率统计学科中极为重要的理论基础．苏联著名概率论学者 Gnedenko 和 Kolmogrov 曾说过：“概率论的认识论的价值只有通过极限定理才能被揭示，没有极限定理就不可能去理解概率论的基本概念的真正含义．” 经典极限理论是概率论发展上的重要成果，而对时间序列中最具代表性的模型之一 —— 线性过程各类极限性质的研究是近代概率极限理论研究中的方向之一，本书就是对线性过程的弱极限性质、强极限性质以及在变点中的应用进行了深入的研究．

线性过程在时间序列分析中具有非常重要的地位，有大量文献都讨论了线性过程的各种性质，它对于经济、工程及物理学科都有着极其广泛的应用．因此很多学者致力于研究线性过程的误差项满足不同条件时线性过程的极限定理．例如当误差项为鞅差随机变量序列 (Fakhre-Zakeri(1997))，误差项为强混合随机变量序列 (Birkel (1993)) 以及误差项在线性坐标正相依 (LPQD) 条件限制下 (Tae-Sung (2001))，已经得到了相应的关于线性过程的中心极限定理 (CLT) 和泛函中心极限定理 (FCLT)．在一些适当的条件下，对于线性过程还有很多极限结果．比如， Burton 和 Dehling (1990) 得到了线性过程的大偏差原理， Yang (1996) 建立了中心极限定理以及重对数律， Li *et al.* (1992) 和 Zhang (1996) 都得到了完全收敛性方面的结果．

本书主要是对由各种相依随机变量产生的线性过程的各类极限性质进行了讨论．众所周知，现实生活中发生的事情大多并不是互不相干的，而是彼此之间

具有某种联系的. 正确地用数学方法描述这种相关性, 就可以用数学 —— 这一精确的工具来对事物进行精确地研究. 由此可见, 研究非独立的随机变量序列有着十分深刻的理论和实际意义. 其实, 关于相依随机变量的极限性质的研究可以追溯到 20 世纪二三十年代, 当时就有 Bernstein (1927) 、 Hopf (1937) 和 Robbins (1948) 等学者相继对其进行研究. 一直到现在, 仍有新的相依变量类型及其结果层出不穷.

本书的第一章就线性过程弱收敛方面的结果进行了深入的讨论. 其中第二节主要讨论了由渐近线性坐标负相依 (ALNQD) 随机变量序列产生的平稳线性过程, 获得了一个泛函中心极限定理. 第三节则是证明了只要满足其中一个关键的不等式, 线性过程的误差项在很多种相依条件的假设下, 都可使与第二节相同的泛函中心极限定理成立. 并且第三节还叙述了一个简单应用, 就是将此结果应用于计量经济中一种很常用过程 —— 单位根过程检验中统计量的极限分布. 然而往往在许多实际问题中, 误差项不是一个简单的实值随机变量, 常常是一个过程. 第四节讨论的就是一列由 $\rho-$ 混合的过程序列产生的线性过程, 得到了部分和的弱收敛性、两参数随机过程的弱收敛性以及随机足标和的弱收敛.

在第二、三章中, 我们讨论了关于线性过程的强极限性质. 在第二章中, 主要研究由两种较为常见的相依随机变量序列产生的线性过程的强极限性质. 完全收敛性的概念是由 Hsu 和 Robbins (1947) 引入的, Erdös (1949, 1950) 和 Spitzer (1956) 也作了相应的研究. 到了 20 世纪 60 年代, Katz (1963) 及 Baum 和 Katz (1965) 推广了他们的结果, 得到如下结论: 设 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 为 i.i.d. 随机变量序列, 记 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. 令 $p < 2, r \geqslant p$. 那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} \mathsf{P}\{|S_n| > \varepsilon n^{1/p}\} < \infty, \quad \varepsilon > 0$$

成立的充要条件为 $\mathsf{E}|X_1|^r < \infty$, 且当 $r \geqslant 1$ 时 $\mathsf{E}X = 0$. 白志东、苏淳 (1985) 对这结果进行进一步的推广与改进. 其后 Davis (1968) 证明了: 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \mathsf{P}\{|T_n| \geqslant \varepsilon \sqrt{n \log n}\} < \infty$$

成立的充要条件为 $\mathsf{E}X_1 = 0$ 且 $\mathsf{E}X^2 < \infty$. 随后, 又产生了各种各样的上述结果的推广形式. 最近, Chen (1978) 及 Gut 和 Spătaru (2000a) 讨论了当 $\epsilon \searrow 0$ 时 i.i.d. 随机变量 Baum-Katz 及 Davis 大数律的精确渐近性 (定理 2.B). 国内, 王

岳宝、张立新等在精确渐近性方面也取得了很多成果. 而对于线性过程, Zhang (1996) 得到了 Baum-Katz 大数律形式的完全收敛性的结果 (定理 2.A), 关于线性过程精确渐近性方面的结果非常之少. 因此我们在第二章的第二节中, 证明了定理 2.B 类型的完全收敛性的精确渐近结果对于在 φ- 混合或 NA 两种相依条件下的线性过程也同样成立. 另一方面, 重对数律是概率极限理论中极为深刻的结果, 它是强大数律的精确化, 对它的研究一直为众多的学者所关注和重视, 并已经得到了许多经典的结论. 最近, Gut 和 Spătaru (2000b) 还发表了一篇关于 i.i.d. 随机变量序列的重对数律的精确渐近性质的文章, 结果见定理 2.C. 而线性过程关于重对数律的精确渐近性方面的结果也非常之少. 因此第三节中, 我们将证明线性过程在 φ- 混合或 NA 两种相依条件下关于类似定理 2.C 的重对数律的精确渐近性结果也同样成立. 将 $\sqrt{n\log\log n}$ 替换成 $\sqrt{n\log n}$ 后, 本节同时证明了类似定理 2.D 的对数律的精确渐近结果也成立. 最后, 矩完全收敛性问题是由 Chow (1988) 提出的, 并讨论了 i.i.d. 随机变量序列的矩完全收敛性 (定理 2.E). 王定成和苏淳 (2002) 讨论了 B 值独立同分布随机变元序列的矩完全收敛性. 则第四节中我们讨论了由 NA 随机变量序列产生的线性过程关于矩的完全收敛性.

由于在 Chow 等人的启发下, 蒋烨的博士论文 (2004) 讨论了 i.i.d. 随机变量序列关于矩的完全收敛及重对数律方面的精确渐近性质. 那么在蒋烨的博士论文 (2004) 的启发下, 第三章中我们主要考虑矩形式的精确渐近结果对线性过程是否也同样成立. 第二节中我们得到了由 i.i.d. 随机变量序列产生的线性过程关于矩形式完全收敛的精确渐近结果. 第三节则得到了关于矩的重对数律的精确渐近结果.

在第四章中, 我们主要讨论了线性过程在变点方面的一点应用. 一般地说, 变点就是 "模型中的某个或某些量起突然变化之点". 这种突然变化往往反映事物的某种质的变化, 在自然界、社会及各种领域中很常见且具有重要性, 虽然从统计学发展的角度看, 变点的统计分析这个课题还不能说已发展得很充分成熟了 (它迄今只有四十余年的历史), 但变点问题在许多应用中都非常重要, 因此针对一些常见的问题发展了若干行之有效的方法, 对应用家来说不失为一个有用的工具. 一旦变点被合适定位后, 原始模型就需要修改, 以便得到更好的数据解释以及更精确的预测. 因此变点估计在经济建模中起了很重要的作用. 许多统计与经济文献中都包含了大量关于变点问题的著作. 近期比较全面的文献可

以参见 Csőrgö 和 Horváth (1997). 单变点均值变动估计的问题是其中一个热门的研究方向，引起了学术界的长期关注. Sen 和 Srivastava (1975a, b), Hawkins (1977), Worsley (1979, 1986), James *et al.* (1987) 以及 Srivastava 和 Worsley (1986) 都考虑的是对一列正态序列提出单变点均值变动的检验. Hinkley (1970), Bhattacharya (1987), Yao (1987) 和其他很多学者考虑的是一列独立变量的单变点估计. 对于序列相关的数据，Picard (1985) 对阶已知的高斯自回归过程进行了估计. 以上这些作者考虑的都是极大似然估计 (MLE). 本章主要是由最小二乘估计 (LS) 方法来讨论线性过程未知变点估计的极限性质. 线性过程的 LS 方法是由 Bai (1994) 提出来的. 这个方法不同于 MLE, 无须对模型中的随机误差的分布有特定的假设，而且计算相对简便. Bai (1994) 用 LS 方法考虑了由 i.i.d. 随机变量序列产生的线性过程的单变点估计. 然而对相依随机变量序列变点的研究无疑是学术界更加感兴趣的问题. 第二节就是考虑在相依假设下线性过程单变点估计的极限性质. 在两方面改进了 Bai (1994) 的结果: (i) 将条件 $\sum_{j=0}^{\infty} j|a_j| < \infty$ 减弱到 $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$, (ii) 在更多的相依假设下用 LS 估计得到了类似的极限性质. 许多早期的努力都致力于单一变点的估计. 相对而言，涉及多变点的文献则较少. 当变点数目未知时多变点问题更加复杂，因此更少的文章致力于此问题. 许多作者只考虑独立随机变量序列的特殊情况. 特别的，Yao (1988) 由 Schwarz 准则估计了独立正态序列均值的变点数目. 但是近期相依观测方面的研究也引起了学术界的广泛关注. 例如 Bai (1994); Davis et al. (1995); Horváth (1993,1997); Picard (1985); Epps (1988) 以及 Bai 和 Perron (1998) 等. 第三节就是讨论了各种相依假设下线性过程多变点的相合性以及相合速度. 当变点数目已知时，主要运用了 Bai (1994) 提出的 LS 方法来估计变点. 而变点数目未知的情况下，则是通过惩罚最小二乘方法来估计的. 此方法根据惩罚性可以视为模型 选择问题 (参见 Schwarz (1978)). 利用弱或强不变原理对观测序列进行逼近检验是变点分析中一种很重要的工具. 当弱不变原理成立时，Horváth (2000) 讨论了变点估计的逼近 CUSUM 检验. 第四节的主要目的就是在弱不变原理成立的条件下，对长程记忆过程进行均值和方差的基于最小二乘残差的逼近 CUSUM 检验.

值得一提的是，本书所涉及的关于重对数律的精确渐近性质以及长程记忆过程的极限性质的课题是近几年极限理论中的热门课题. 且文中有些结果所需的条件已经达到与独立同分布序列相关已知结果对等的程度，如第二章中的关于由 φ- 混合、NA 序列产生的线性过程的结论大多达到了最一般的独立情形完

全对等的程度. 而所加条件在独立情形时是充分必要的, 因此在我们讨论的情形中, 这些条件也是不可减弱的, 关于线性过程的条件也是一般性的. 然而, 限于个人的学识能力, 文中仍有一些结果还没达到最佳的程度.

Preface

Theory of Probability is a science of quantitatively studying regularity of random phenomena, which is extensively applied in natural science, technological science, social science and managerial science etc. Hence, it has been developing rapidly since 1930's and many new branches have emerged from time to time. Limit Theory is one of the branches and also an important theoretical basis of science of Probability and Statistics. As stated in the classical book "Limit distributions for sums of independent random variables"(1949) by B.V.Gendenko and A.N.Kolmogrov, "The epistemological value of the theory of probability is revealed only by limit theorems. Without limit theorems it is impossible to understand the real content of the primary concept of all our sciences — the concept of probability." Classical limit theory is the signify achievement in the progress of Probability. The linear processes are the most representative model in time series. Studying various limiting properties of linear processes is one of orientations of the current study of Limit Theory. Some significant results of the linear processes about weak limit properties, strong limit properties and application in change-points problem have been reached through deep research in this dissertation.

The linear processes are of special important in time series analysis and they arise in a wide variety of contexts. Applications to economics, engineering and

physical sciences are extremely broad and a vast amount of literature is devoted to the study of the limiting theorems for the linear processes under various condition on errors. For example, under the martingle difference assumption on error, under the strong mixing condition on error and under LPQD condition on error, the central limit theorem (CLT) and the functional central limit theorem (FCLT) of the linear processes are proved. Under some suitable conditions, other limiting results have been obtained for the linear processes. For example, Burton and Dehling (1990) have obtained a large deviation principle for the linear processes, Yang (1996) has established CLT and the law of the iterated logarithm (LIL), Li *et al.* (1992) and Zhang (1996) have obtained the results on the complete convergence *etc.*

Some kinds of limiting properties of the linear processes under various dependence assumptions are discussed in this paper. As is known to all, everything has correlations between one another in the world. If we can properly describe these correlations by mathematics, we can analyze subjects accurately by the precise tool– mathematics. Hence one can see that, the study on dependent random variables has momentous significance. In fact, the study on the limit properties of dependent random variables may be dated back to 1920's and 1930's. At that time, scholars such as Bernstein (1927), Hopf (1937) and Robbins (1948) had carried on studies on this topic. Till now, new kinds of dependent random variables and their corresponding conclusions have emerged in a endless stream.

The first chapter presents a insightful discussion over the results about weak convergence of the linear processes. In the second section of this chapter, the stationary linear processes generated by asymptotically linear negative quadrant dependent (ALNQD) are considered, and the FCLT is obtained. The third section considers a more general linear process with dependent errors. It is shown that if the dependent errors satisfy a key inequality, the FCLT is also true. As a simple

application, the limit distribution of the statistics in testing the unit-root process is obtained. The unit-root process is a important process in theory of econometrics. However, the error involved in many practical problems is usually a process rather than a simple real random variable. The forth section copes with such a linear process in question, which generated from a sequence of ρ-mixing processes, and obtains the weak convergence about the partial sums of this process, two parameters stochastic process and the random sum.

The second and third chapters are about the strong limit properties of the linear processes, and the second one mainly considers the strong limit properties of the linear processes generated by two common dependent random variables. The results on this two chapters are related to the well-known complete convergence. Erdös (1949, 1950) and Spitzer (1956) have carried out the relevant research on the concept of the complete convergence, introduced first by Hsu and Robbins (1947), and later in the 1960's, Katz (1963) and Baum and Katz (1965) popularized the outcome and came to the following conclusion, Let $1 \leqslant p < 2$, $r \geqslant p$, then

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} \mathsf{P}\{|\sum_{k=1}^{n} X_k| > \varepsilon n^{1/p}\} < \infty, \quad \varepsilon > 0$$

holds, if and only if $\mathsf{E}|X_1|^r < \infty$, and, when $r \geqslant 1$, $\mathsf{E}X = 0$. Davis (1968) proved: for any $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \mathsf{P}\{|\sum_{k=1}^{n} X_k| \geqslant \varepsilon \sqrt{n \log n}\} < \infty.$$

holds, if and only if $\mathsf{E}X_1 = 0$ and $\mathsf{E}X^2 < \infty$. Bai *et al.*(1985) established a more general result on this topic. Subsequently followed by a variety of ways to popularize. Furthermore, Chen (1978) and Gut and Spătaru (2000a) have studied the precise asymptotics of i.i.d. random variables in the Baum-Katz and Davis laws of large numbers as $\epsilon \searrow 0$ (Theorem 2.B). Some Chinese scholars have also studied the precise asymptotics. As to the linear processes, Zhang (1996) have obtained the result of the complete convergence in the form of Baum-Katz and Davis laws

(Theorem 2.A). However, the precise asymptotics results about the linear processes are very few. In section 2, chapter 2, the purpose is to show that the kind of precise asymptotics result such as Theorem 2.B also holds for the linear process under φ-mixing and NA dependence assumptions. On the other hand, it is well-known that LIL is a very propounding result in Probability Limit Theory. It is the precise phenomenon of the strong law of large numbers. Many scholars have always paid close attention to the study of LIL and a lot of classical conclusions have been drawn. Recently, Gut and Spătaru (2000b) published an article regarding the precise asymptotics in LIL of i.i.d. random variables (see Theorem 2.C). But few results for the precise asmyptotics in LIL about the linear processes are known. In section 3, we shall prove that the kind of precise asymptotics result on LIL such as Theorem 2.C also holds for the linear process both under φ-mixing and NA dependence assumptions. By replacing $\sqrt{n \log\log n}$ by $\sqrt{n \log n}$, this section also gives the result for the precise asymptotics on the law of the logarithm such as Theorem 2.D.

The moment type convergence of the complete convergence was introduced first by Chow (1988), and this convergence of i.i.d. random variables was discussed (Theorem 2.E). Then Wang and Su (2002) established the moment convergence of i.i.d. random elements on Banach space. In section 4, the moment convergence of the linear process under NA dependence assumption will be studied. Enlightened by Chow's result, Jiang (2004) discussed the precise asymptotics properties on moment convergence and LIL about i.i.d. random variables. Then, with the help of Jiang's research, we mainly consider whether the precise asymptotics on moment about the linear processes also hold in Chapter 3. In section 2, we obtain the result of the precise asymptotics on moment convergence for the linear processes of i.i.d. random variables. In section 3, the precise asymptotics on moment LIL is also studied.

The fourth chapter is on the applications of the linear processes in change-point problems. Generally speaking, change-point is " the point which some quantities suddenly change in the models ", such a sudden change is usually a qualitative change of things, which is common but important in nature, society and various fields. Although, from the statistical viewpoint, the project of statistical analysis of change-points can not be considered the most developed, it is vital in many applications. As a result, several effective ways to common problems are emerged, which is useful for the applications. Once a change point is properly located, the original model should be modified accordingly to provide better interpretation of data and more accurate forecasts. Therefore change point estimation plays a extremely active role in econometric modeling, and there are many articles about change-point problems in statistical and economic literature. As for all-around literature, we can turn to Csőrgö and Horváth (1997). Among various issues, estimation of the single mean shift is no doubt a popular research topic, which arouses long-range attention in academic field. Sen and Srivastava (1975a, b), Hawkins (1977), Worsley (1979, 1986), James *et al.* (1987) and Srivastava and Worsley (1986) proposed tests for testing a shift in a sequence of normal means. Hinkley (1970), Bhattacharya (1987), Yao (1987) and many others considered the estimation of the shift point in a sequence of independent variables. For serially correlated data, Picard (1985) estimated a shift in Gaussian autoregressive process with a known order. These authors considered maximum likelihood estimation (MLE). This chapter discusses the least-square (LS) estimator of the unknown change-point in the linear process, which has been proposed by Bai (1994). Unlike the MLE, the LS method does not need to specify the underlying error distribution function and is computationally simple. The LS procedure also allows a broader specification of correlation structure in the data than MLE can typically permit. Bai (1994) has considered a linear process of i.i.d. variables by the LS method. However, it is undoubtedly more in-

teresting to study change-points about dependent random variables. In section 2, we consider the limit properties of the change-point estimation for the linear processes under dependence assumptions, and at the same time, Bai's (1994) outcomes are improved from two aspects: (i) to weaken the condition $\sum_{j=0}^{\infty} j|a_j| < \infty$ to $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$, (ii) similar limit properties are obtained under more dependence assumptions. Most early efforts have been devoted to the detection of a unique change-point. In comparison, less studies have been carried out on the issue of multiple structural changes in multiple changes. The problem is much more intricate when the number of changes is unknown, and only a few papers are published on this problem. Many people only consider the particular case of changes in a sequence of independent random variables. In particular, Yao (1988) estimated the number of jumps in an independent normal sequence via 'Schwarz' criterion. Some others also considered the problem of dependent data, for example, Bai (1994); Davis *et al.* (1995); Horváth (1993, 1997); Picard (1985); Epps (1988) and Bai and Perron (1998) and so on. In section 3, we discuss the consistency and the rate convergence of the multiple change-points estimation of the linear processes under various dependence assumptions. When the number of change-points is known, the configuration of change-points is estimated by LS method, which has been proposed by Bai (1994). When the number of changes is unknown, it is estimated by using penalized least-squares approach. This method of change-points detection can be seen as a problem of model selection via penalization (see Schwarz (1978)). One of the key tools in change-point analysis is to make use of a weak (or strong) invariance principle for the observed sequence and to develop an asymptotic test. Horváth (2000) derived asymptotic CUSUM tests for detecting changes of weak dependence processes for which a weak invariance principle is available. The main aim of the section 4 is to derive the asymptotic CUSUM tests (based on least squares residuals) for detecting changes in the mean or variance of a strong

dependence process such as a linear process with long memory.

It should be pointed out that some subjects mentioned in this article, such as the precise asymptotics in LIL and the limit properties of the long memory processes, are hot topics in field of limit theorems. And we try our best to make each of our results as perfect as possible. For instance, in Chapter 2, the results on linear process are established under minimal conditions. These conditions are sufficient and necessary for partial sums of i.i.d. random variables. However, due to the limitation of academic ability, some results in the paper may not come to the optimality.

文中部分缩写及符号说明

$r.v.$	随机变量
$a.s.$	几乎必然
i.i.d.	互相独立且同分布
$\mathsf{E}X$	随机变量X的数学期望
$\mathsf{Var}X$	随机变量X的方差
$\mathsf{Cov}(X,Y)$	随机变量X与Y的协方差
$X_n \to X$ a.s.	随机变量序列$\{X_n\}$几乎必然收敛于随机变量X
$X_n \xrightarrow{P} X$	随机变量序列$\{X_n\}$依概率收敛于随机变量X
$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$	随机变量序列$\{X_n\}$依分布收敛于随机变量X
$\mu_n \Rightarrow \mu$	测度序列$\{\mu_n\}$弱收敛于测度μ
$U \stackrel{\mathcal{D}}{=} V$	U与V等价，即U与V有相同的有限维分布
$I\{A\}$	集合A的示性函数
$\sharp A$	集合A中元素的个数

$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{Z}^+$	非负整数集
$\mathbf{N}$	正整数集
$a_n = O(b_n)$	$\limsup_{n\to\infty} a_n/b_n < \infty$
$a_n = o(b_n)$	$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$
[a] , a > 0	表示不大于 a 的整数
C	仅表示一个正常数，其值在上下文中可以不同
$\{W(t); t \geqslant 0\}$	表示一个标准$Wiener$过程
$\log n$	$\log n = \log(n \vee \mathrm{e})$
$\log\log n$	$\log\log n = \log\log(n \vee \mathrm{e}^{\mathrm{e}})$

目 录

第一章　线性过程的弱收敛定理

第一节　引　言

令 $\{X_t; t \in Z^+\}$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的平稳线性过程，其形式和定义如下:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \tag{1.1.1}$$

其中 $\{a_j; j \in Z^+\}$ 为一实数序列，满足 $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$, $\{\varepsilon_t; t \in Z^+\}$ 为一平稳的随机变量序列，满足 $E\varepsilon_t = 0$, $0 < E\varepsilon_t^2 < \infty$.

线性过程在时间序列分析中具有非常重要的地位，有大量文献都讨论了线性过程的各种性质，它对于经济，工程及物理学科都有着极其广泛的应用．因此很多学者致力于研究 ε_t 满足不同条件时线性过程的极限定理．例如当 ε_t 为鞅差随机变量序列 (Fakhre-Zakeri(1997)), ε_t 为强混合随机变量序列 (Birkel (1993)) 以及 ε_t 在线性坐标正相依 (LPQD) 条件限制下 (Tae-Sung (2001)), 已经得到了

相应的 X_t 的中心极限定理 (CLT) 和泛函中心极限定理 (FCLT). 因此本章第二节就主要讨论了由渐近线性坐标负相依随机变量序列 $\{\varepsilon_t; t\in Z^+\}$ 产生的形如 (1.1.1) 式的平稳线性过程, 获得了一个泛函中心极限定理. 这在相应的时间序列分析中具有十分重要的实际意义. 第三节则是证明了只要满足其中一个关键的不等式, $\{\varepsilon_t; t\in Z^+\}$ 在很多种相依条件的假设下, 都可使与第二节相同的泛函中心极限定理成立. 并且第三节还叙述了一个简单应用, 就是将此结果应用于计量经济中一种很常用过程 — 单位根过程检验中统计量的极限分布.

但往往在许多实际问题中, ε_j 不是一个简单的实值随机变量, 常常是一个过程 $\varepsilon_j(t)$. 定义由随机过程序列产生的线性模型形式如下:

$$X_k(t)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon_{k-j}(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{1.1.2}$$

其中 $\{a_j; j\geqslant 0\}$ 为一实数序列满足 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|a_j|<\infty$, $\{\varepsilon_k(t); 0\leqslant t\leqslant 1\}_{k=1}^{\infty}$ 为一列随机过程, 满足:

(i) $\forall k\geqslant 1, \varepsilon_k(0)=0$;

(ii)$\forall k\geqslant 1, 0\leqslant t\leqslant 1, E\varepsilon_k(t)=0$.

记部分和 $S_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k(t)$, 对任意的 $n\geqslant 1$, 再定义随机过程

$$Y_n(s,t)=\frac{1}{\sqrt{n}}S_{[ns]}(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{[ns]}X_k(t),\quad 0\leqslant s,t\leqslant 1. \tag{1.1.3}$$

所以本章的第四节讨论的是一列由 $\rho-$ 混合的过程序列 $\{\varepsilon_j(t); 0\leqslant t\leqslant 1\}_{j=1}^{\infty}$ 产生的线性过程 $X_k(t)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon_{k-j}(t)$, 得到了部分和 $S_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k(t)$ 的弱收敛性、两参数随机过程 $Y_n(s,t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{[ns]}X_k(t)$ 的弱收敛性以及随机足标和 $S_{N_n}(t)$ 的弱收敛.

第二节 由渐近线性坐标负相依产生的平稳线性过程的弱收敛

§1.2.1 介绍及主要结果

在本节及下节中，我们主要讨论了形如 (1.1.1) 式的平稳线性过程的泛函中心极限定理. 本节中讨论了由 Zhang (2000a) 提出的一种新的相依随机变量定义，被称为渐近线性坐标负相依 (简称 ALNQD), 此种相依变量要比线性坐标负相依 (LNQD) 和 ρ^*- 混合随机变量弱 (定义参见 Bradley (1993) 和 Peligrad (1996)).

令 $\mathcal{C}$ 为一函数族，其中函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_j) : \mathbf{R}^j \to \mathbf{R}(j \geqslant 1)$ 关于两两坐标单调不减. 对于随机变量 X 和 Y, 定义

$$\rho^-(X,Y) = 0 \vee \sup \frac{\mathrm{Cov}(f(X), g(Y))}{(\mathrm{Var} f(X))^{1/2}(\mathrm{Var} g(Y))^{1/2}},$$

其中 sup 取遍所有的 $f, g \in \mathcal{C}$ 且满足 $E[f(x)]^2 < \infty$ 和 $E[g(Y)]^2 < \infty$. 对任意不相交的子集合 $S, T \subset N$, 定义

$$\rho^-(S,T) = \sup\{\rho^-(X,Y) : X \in F(S),\ Y \in F(T)\},$$

其中 $F(S) = \{ \sum_{k \in S} a_k \varepsilon_k$; 对有限多个 k 满足 $a_k \geqslant 0$ 且 $a_k \neq 0$ }, $F(T)$ 定义类似.

定义 1.2.1 如果满足当 $r \to \infty$ 时 $\rho^-(r) = \sup\{\rho^-(S,T); \mathrm{dist}(S,T) \geqslant r,\ S, T \subset$

N 且有限 $\}\to 0$, 那么随机变量序列 $\{\varepsilon_k; k\in Z^+\}$ 被称为渐近线性坐标负相依 *(ALNQD)*.

Zhang (2000a, b) 分别得到了关于 ALNQD 随机变量的 CLT 和 FCLT.

定理 1.A (参见 Zhang(2000a)) 若 $\{\varepsilon_k; k\in Z^+\}$ 为 *ALNQD* 随机变量序列，满足 $E\varepsilon_k=0$, $E\varepsilon_k^2<\infty$. 令 $\xi_n=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k$, $\sigma_n^2=\mathrm{Var}\xi_n$. 假设

(i) $u(r)=\sup_k\sum_{\|j-k\|\geqslant r}\mathrm{Cov}(\varepsilon_j,\varepsilon_k)^-\to 0$ $(r\to\infty)$ 及 $u(1)<\infty$, 其中 $\mathrm{Cov}(\cdot,\cdot)^-$ 表示 $(\mathrm{Cov}(\cdot,\cdot))^-$;

(ii) $\liminf_{n\to\infty} n^{-1}\sigma_n^2>0$;

(iii) $\sup_{k\in Z^+} E|\varepsilon_k|^{2+\delta}<\infty$ 对某个 $\delta>0$ 成立.

那么 $\frac{\xi_n}{\sigma_n}\xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$ 当 $n\to\infty$ 时成立.

定理 1.B (参见 Zhang(2000b)) 若 $\{\varepsilon_k; k\in Z^+\}$ 为 *ALNQD* 随机变量序列，满足 $E\varepsilon_k=0$, $E\varepsilon_k^2<\infty$. 令 $Z_n(u)=\sigma_n^{-1}\xi_{[nu]}$, 其中 σ_n^2 和 ξ_n 与定理 *1.A* 中的定义相同. 假设满足定理 *1.A* 中的条件 (i) $\sim$ (iii) 和:

(iv) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_{nk}^2}{\sigma_n^2}=k$ 对任意的 $k\in N$ 成立.

那么当 $n\to\infty$ 时，$Z_n\Rightarrow W$ 成立，其中 $\{W(u); u\in[0,1]\}$ 为一标准 *Weiner* 过程.

令 $S_n=\sum_{t=1}^{n}X_t$, X_t 如 (1.1.1) 定义，$\tau^2=\sigma^2(\sum_{j=0}^{\infty}a_j)^2$, 其中 $\sigma^2=E\varepsilon_1^2+2\sum_{t=2}^{\infty}E\varepsilon_1\varepsilon_t$. 定义对任意的 $n\geqslant 1$, 随机过程为

$$W_n(u)=n^{-\frac{1}{2}}\tau^{-1}S_{[nu]},\quad u\in[0,1]. \tag{1.2.1}$$

本节得到了关于过程 (1.2.1) 的一个泛函中心极限定理.

定理 1.2.1 令 $\{X_t; t\in Z^+\}$ 为一平稳的形如 (1.1.1) 式的线性过程, 其中 $\{a_j; j\in Z^+\}$ 为一实数序列满足 $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|<\infty$ 以及 $\{\varepsilon_t; t\in Z^+\}$ 为一平稳的 ALNQD 随机变量序列满足 $E\varepsilon_t=0$, $0<E\varepsilon_t^2<\infty$. 假设

$$\sum_{t=2}^{\infty}(E\varepsilon_1\varepsilon_t)^-<\infty,\quad 0<\sigma^2=E\varepsilon_1^2+2\sum_{t=2}^{\infty}E\varepsilon_1\varepsilon_t<\infty, \tag{1.2.2}$$

对某个 $r>2$, 有

$$\sup E|\varepsilon_t|^r<\infty. \tag{1.2.3}$$

那么形如 (1.2.1) 式的过程 $\{W_n(u); u\in[0,1]\}$ 服从 FCLT, 即 $W_n\Rightarrow W\ (n\to\infty)$, 其中 $\{W(u); u\in[0,1]\}$ 为一标准的 Wiener 过程.

推论 1.2.1 令 $\{X_t; t\in Z^+\}$ 为形如 (1.1.1) 式的平稳的线性过程, 其中 $\{a_j; j\in Z^+\}$ 为一实数序列满足 $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|<\infty$ 以及 $\{\varepsilon_t; t\in Z^+\}$ 为一平稳的 LNQD 或者 ρ^*- 混合的随机变量序列满足 $E\varepsilon_t=0$, $0<E\varepsilon_t^2<\infty$. 如果满足定理的条件 (1.2.2) 和 (1.2.3), 那么形如 (1.2.1) 式的过程 $\{W_n(u); u\in[0,1]\}$ 服从 FCLT.

§1.2.2 引理及其证明

引理 1.2.1 令 $\{\varepsilon_t; t\in Z^+\}$ 为一平稳的 ALNQD 随机变量序列满足 $E\varepsilon_t=0$, $0<E\varepsilon_t^2<\infty$. 假设 $\sup_{t\in Z^+}E|\varepsilon_t|^{2+\delta}<\infty$ 对于某个 $\delta>0$ 成立. 那么存在 $r>2$ 以及不依赖于 n 的常数 $B_r=B(r)$ 满足对任意的 $n\geqslant 1$ 有

$$E(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k|^r)\leqslant B_r n^{\frac{r}{2}}\max_{1\leqslant k\leqslant n}E|\varepsilon_k|^r. \tag{1.2.4}$$

证明 此引理的证明已在 Zhang (2000a) 的引理 3.4 中给出，这里不再重复.

引理 1.2.2 令 $\{\varepsilon_t; t\in Z^+\}$ 为一平稳的 *ALNQD* 随机变量序列满足 $E\varepsilon_t=0$, $0<E\varepsilon_t^2<\infty$. 定义 $X_t=\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon_{t-j}$, $S_n=\sum\limits_{t=1}^{n}X_t$, $\widetilde{X}_t=\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon_t$, $\widetilde{S}_n=\sum\limits_{t=1}^{n}\widetilde{X}_t$, 其中 $\{a_j; j\in Z^+\}$ 为一常数序列，满足 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|a_j|<\infty$. 假设对某个 $\delta>0$, $\sup\limits_{t\in Z^+}E|\varepsilon_t|^{2+\delta}<\infty$ 成立，以及

$$0<\sigma^2=E\varepsilon_1^2+2\sum_{t=2}^{\infty}E\varepsilon_1\varepsilon_t<\infty. \tag{1.2.5}$$

那么

$$n^{-\frac{1}{2}}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\widetilde{S}_k-S_k|\xrightarrow{P}0. \tag{1.2.6}$$

证明 首先将 $\widetilde{S}_k$ 分成两部分，有

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_k &= \sum_{t=1}^{k}\widetilde{X}_t=\sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=0}^{\infty}a_j)\varepsilon_t\\
&= \sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=0}^{k-t}a_j)\varepsilon_t+\sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=k-t+1}^{\infty}a_j)\varepsilon_t\\
&= \sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=0}^{t-1}a_j\varepsilon_{t-j})+\sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=k-t+1}^{\infty}a_j)\varepsilon_t.
\end{aligned}$$

这样

$$\widetilde{S}_k-S_k=-\sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=t}^{\infty}a_j\varepsilon_{t-j})+\sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=k-t+1}^{\infty}a_j)\varepsilon_t\triangleq \mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

现在需要证明

$$n^{-\frac{1}{2}}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}|\xrightarrow{P}0 \tag{1.2.7}$$

以及

$$n^{-\frac{1}{2}}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{II}|\xrightarrow{P}0. \tag{1.2.8}$$

首先，对于 $r>2$ 有

$$
\begin{aligned}
& n^{-\frac{r}{2}} E \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\sum_{t=1}^{k}\sum_{j=t}^{\infty} a_j\varepsilon_{t-j}|^r = n^{-\frac{r}{2}} E \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{j\wedge k} a_j\varepsilon_{t-j}|^r \\
\leqslant\ & n^{-\frac{r}{2}} (\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \{E \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\sum_{t=1}^{j\wedge k} \varepsilon_{t-j}|^r\}^{\frac{1}{r}})^r \quad (\text{由 Minkowski 不等式得}) \\
\leqslant\ & n^{-\frac{r}{2}} \{\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| B_r^{\frac{1}{r}} (j\wedge n)^{\frac{1}{2}} (\max_{1\leqslant k\leqslant n} E|\varepsilon_k|^r)^{\frac{1}{r}}\}^r \quad (\text{由引理 1.2.1 得}) \\
\leqslant\ & C\Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| B_r^{\frac{1}{r}} ((j\wedge n)/n)^{\frac{1}{2}}\Big)^r, \\
& (\text{由假设对某个}\delta>0,\text{有}\sup_{t\in Z^+} E|\varepsilon_t|^{2+\delta}<\infty,\text{得到}\max_{1\leqslant k\leqslant n} E|\varepsilon_k|^r\leqslant C, \\
& \text{其中 } C \text{为一常数}) \\
=\ & o(1). \quad (\text{由控制收敛定理得})
\end{aligned}
$$

对任意的 $\varepsilon>0$, $P(n^{-\frac{1}{2}}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}|>\varepsilon)\leqslant \varepsilon^{-r} n^{-\frac{r}{2}} E \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\sum_{t=1}^{k}\sum_{j=t}^{\infty} a_j\varepsilon_{t-j}|^r = o(1)$. 因此由 Markov 不等式立即可证得 (1.2.7) 式.

为了证明 (1.2.8) 式，将 II 分为两部分 $\mathrm{II}=\mathrm{II}_{k_1}+\mathrm{II}_{k_2}$，其中 $\mathrm{II}_{k_1}=a_1\varepsilon_1+a_2(\varepsilon_k+\varepsilon_{k-1})+\cdots+a_k(\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_1)$ 以及 $\mathrm{II}_{k_2}=(a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots)(\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_1)$，并且令 $\{p_n\}$ 为一正整数序列满足

$$
p_n\to\infty,\ \frac{p_n}{n}\to 0,\quad n\to\infty. \tag{1.2.9}
$$

那么

$$
\begin{aligned}
n^{-\frac{1}{2}}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{II}_{k_2}| \leqslant\ & \Big(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|\Big) n^{-\frac{1}{2}} \max_{1\leqslant k\leqslant p_n} |\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k| \\
& + \Big(\sum_{j>p_n}|a_j|\Big) n^{-\frac{1}{2}} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k| \triangleq \mathrm{III}+\mathrm{IV}.
\end{aligned}
$$

由引理 1.2.1 及 (1.2.9) 式，对于 $r>2$ 和常数 B_1,

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|\Big)^r n^{-\frac{r}{2}} E \max_{1\leqslant k\leqslant p_n}|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k|^r &\leqslant \Big(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|\Big)^r B_1\Big(\frac{p_n}{n}\Big)^{\frac{r}{2}} \max_{1\leqslant k\leqslant p_n} E|\varepsilon_k|^r\\ &\leqslant C\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|\Big)^r B_1\Big(\frac{p_n}{n}\Big)^{\frac{r}{2}}=o(1),\end{aligned}$$

对任意的 $\varepsilon>0$,

$$P(\mathrm{III}>\varepsilon)\leqslant \varepsilon^{-r}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|\Big)^r n^{-\frac{r}{2}} E \max_{1\leqslant k\leqslant p_n}|\varepsilon_1\cdots+\varepsilon_k|^r=o(1).$$

由 Markov 不等式，可得 $\mathrm{III}\xrightarrow{P}0$. 类似地，由假设 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|a_j|<\infty$, 对于 $r>2$ 及常数 B_2,

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j>p_n}|a_j|\Big)^r n^{-\frac{r}{2}} E \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k|^r &\leqslant \Big(\sum_{j>p_n}|a_j|\Big)^r B_2 \max_{1\leqslant k\leqslant n} E|\varepsilon_k|^r\\ &\leqslant CB_2\Big(\sum_{j>p_n}|a_j|\Big)^r=o(1).\end{aligned}$$

则由 Markov 不等式，同样可得 $\mathrm{IV}\xrightarrow{P}0$. 因此证得 $n^{-1/2}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{II}_{k_2}|\xrightarrow{P}0$. 最后只需证明 $L_n=n^{-1/2}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{II}_{k_1}|\xrightarrow{P}0$. 对每个 $m\geqslant1$, 定义 $\mathrm{II}_{k_{1,m}}=b_1\varepsilon_k+b_2(\varepsilon_k+\varepsilon_{k-1})+\cdots+b_k(\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_1)$, 其中当 $k\leqslant m$ 时 $b_k=a_k$, 否则 $b_k=0$, 令 $L_{n,m}=n^{-1/2}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{II}_{k_{1,m}}|$. 那么对每个 $m\geqslant1$,

$$L_{n,m}\leqslant n^{-\frac{1}{2}}(|a_1|+\cdots+|a_m|)(|\varepsilon_1|+\cdots+|\varepsilon_m|)\xrightarrow{P}0,\quad n\to\infty, \tag{1.2.10}$$

$$|L_{n,m}-L_n|\leqslant n^{-\frac{1}{2}}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{k}(a_i-b_i)(\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_{k-i+1})\Big|.$$

那么

$$\Big|\sum_{i=1}^{k}(a_i-b_i)(\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_{k-i+1})\Big|=\begin{cases}0, & k\leqslant m,\\ \Big|\sum\limits_{i=m+1}^{k}a_i(\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_{k-i+1})\Big|, & 否则,\end{cases}$$

因此

$$
\begin{aligned}
& n^{-\frac{1}{2}} \max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{k}(a_i-b_i)(\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_{k-i+1})\Big| \\
\leqslant\ & n^{-\frac{1}{2}} \max_{m<k\leqslant n}\Big(\sum_{i=m+1}^{k}|a_i||\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_{k-i+1}|\Big) \\
\leqslant\ & n^{-\frac{1}{2}} \max_{m<k\leqslant n}\sum_{i=m+1}^{k}|a_i|\max_{m<i\leqslant k}|\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_{k-i+1}| \\
\leqslant\ & n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i>m}|a_i|\max_{m<k\leqslant n}\max_{m<i\leqslant k}(|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k|+|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-i+1}|) \\
\leqslant\ & n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i>m}|a_i|\Big(\max_{m<k\leqslant n}|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k|+\max_{m<k\leqslant n}\max_{m<i\leqslant k}|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-i+1}|\Big) \\
\leqslant\ & n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i>m}|a_i|\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k|+\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k|\Big) \\
=\ & 2n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i>m}|a_i|\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k|.
\end{aligned}
$$

所以由 Markov 不等式, 对于任意的 $\varepsilon>0$,

$$
\begin{aligned}
& \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sup P(|L_{n,m}-L_n|>\varepsilon) \\
\leqslant\ & \lim_{m\to\infty}2^r\varepsilon^{-r}\Big(\sum_{j>m}|a_j|\Big)^r\lim_{n\to\infty}\sup n^{-r/2}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k|^r \\
\leqslant\ & B_r\lim_{m\to\infty}\varepsilon^{-r}\cdot 2^r\Big(\sum_{j>m}|a_j|\Big)^r\max_{1\leqslant k\leqslant n}E|\varepsilon_k|^r \quad (\text{由引理 1.2.1 得}) \\
=\ & 0 \quad (\text{由假设}\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|<\infty\text{得}). \qquad (1.2.11)
\end{aligned}
$$

根据 (1.2.10),(1.2.11) 式, 再由 Billingsley (1968, p.25) 中的定理 4.2, 可得 $L_n\xrightarrow{P}0$. 这样就证明了 $n^{-1/2}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\text{II}|\xrightarrow{P}0$. 此引理证明完毕.

引理 1.2.3 令 $\{\varepsilon_t;t\in Z^+\}$ 为一平稳的 *ALNQD* 随机变量序列满足 $E\varepsilon_t=0$, $0<E\varepsilon_t^2<\infty$. 假设 $\sum_{t=2}^{\infty}(E\varepsilon_1\varepsilon_t)^-<\infty, 0<\sigma^2=E\varepsilon_1^2+2\sum_{t=2}^{\infty}E\varepsilon_1\varepsilon_t<\infty$, 以及

对某个 $\delta>0$, $\sup_t E|\varepsilon_t|^{2+\delta}<\infty$ 成立. 定义 $Z_n(u)=n^{-1/2}\sigma^{-1}\xi_{[nu]}$, $u\in[0,1]$, 其中 ξ_n 如定理 *1.A* 中定义. 那么, 当 $n\to\infty$ 时, $Z_n\Rightarrow W$ 成立, 其中 $\{W(u);u\in[0,1]\}$ 为一标准 *Wiener* 过程.

证明 由平稳性, $E\xi_n^2=nE\varepsilon_1^2+2\sum_{k=2}^{n}(n+1-k)E\varepsilon_1\varepsilon_k$, 那么

$$|\sigma^2-\frac{1}{n}E\xi_n^2|\leqslant 2\sum_{k=n+1}^{\infty}|E\varepsilon_1\varepsilon_k|+\frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=i}^{\infty}|E\varepsilon_1\varepsilon_k|\to 0(n\to\infty).$$

得 $E\xi_n^2/n\to\sigma^2\ \ (n\to\infty)$, 即 $\sigma_n^2/n\to\sigma^2\ \ (n\to\infty)$ 以及 $\sigma_{nk}^2/nk\to\sigma^2\ \ (n\to\infty$, 其中 $k\in N)$. 类似地, 由平稳性,

$$u(r)=\sup_k\sum_{|j-k|\geqslant r}\mathrm{Cov}(\varepsilon_j,\varepsilon_k)^-=\sum_{|j-1|\geqslant r}\mathrm{Cov}(\varepsilon_1,\varepsilon_j)^-=\sum_{|j-1|\geqslant r}(E\varepsilon_1\varepsilon_j)^-,$$

$$u(1)=\sum_{|j-1|\geqslant 1}(E\varepsilon_1\varepsilon_j)^-=\sum_{j=2}^{\infty}(E\varepsilon_1\varepsilon_j)^-.$$

因此, 如果条件 $\sum_{t=2}^{\infty}(E\varepsilon_1\varepsilon_t)^-<\infty$ 满足, 那么定理 1.B 中的条件 (i) $\sim$ (iv) 都满足.

所以, 此引理的结论成立, 即 $Z_n(u)=n^{-1/2}\sigma^{-1}\xi_{[nu]}\Rightarrow W\ (n\to\infty)$.

§1.2.3 定理的证明.

定理 1.1.1 **的证明** 如引理 1.2.2, 令 $\widetilde{X}_t=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon_t$, $\widetilde{S}_n=\sum_{t=1}^{n}\widetilde{X}_t=(\sum_{j=0}^{\infty}a_j)\cdot(\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t)$, 那么

$$E\widetilde{X}_n^2+2\sum_{t=2}^{\infty}E\widetilde{X}_n\widetilde{X}_t=\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_j\Big)^2\sigma^2=\tau^2<\infty,$$

$$\sup_t E|\widetilde{X}_t|^{2+\delta}=\sup_t E\Big|(\sum_{j=0}^{\infty}a_j)\varepsilon_t\Big|^{2+\delta}\leqslant\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|\Big)^{2+\delta}\sup_t E|\varepsilon_t|^{2+\delta}<\infty.$$

因为 $\widetilde{X}_t$ 为平稳 ALNQD 随机变量序列，那么 $\{\widetilde{X}_t; t \in Z^+\}$ 满足引理 1.2.3 的条件. 因此过程 $\{\widetilde{W}_n(u); u \in [0,1]\}$ 服从定理的结论，其中 $\widetilde{W}_n(u)$ 与 (1.2.1) 式形式相同，只是其中 S_n 用 $\widetilde{S}_n$ 代替. 而根据引理 1.2.2,

$$\sup_{u\in[0,1]} |\widetilde{W}_n(u) - W_n(u)| \xrightarrow{P} 0,$$

因此过程 $W_n(u)$ 也服从定理的结论.

第三节 由其他相依序列产生的平稳线性过程的弱收敛及应用

§1.3.1 其他相依假设下线性过程的泛函中心极限定理

从第二节的证明可以看出，定理的证明关键在于引理 1.2.2 的证明，而引理 1.2.2 的证明关键则是引理 1.2.1 的不等式 (1.2.4). 于是注意到，不等式 (1.2.4) 特别地有，

$$E(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_{m+1}+\cdots+\varepsilon_{k+m}|^2)\leqslant Cn,\quad \forall n\geqslant 1, m\geqslant 0 \tag{1.3.1}$$

假设 $\{\varepsilon_t;t\in Z^+\}$ 为一平稳随机变量序列满足 $E\varepsilon_t=0$, $0<E\varepsilon_t^2<\infty$ 以及条件 (1.2.5). 那么我们发现只要在引理 1.2.2 的证明中取 $r=2$, 并且保证不等式 (1.3.1) 以及 $\{\varepsilon_t;t\in Z^+\}$ 的弱收敛

$$T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{[Ts]}\varepsilon_t\Rightarrow\sigma B(s) \tag{1.3.2}$$

成立，就有以下定理.

定理 1.3.1 $\{X_t;t\in Z^+\}$ 为形如 *(1.1.1)* 式的平稳的线性过程，其中 $\{a_j;j\in Z^+\}$ 为一实数序列满足 $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|<\infty$. 假设 $\{\varepsilon_t;t\in Z^+\}$ 为一平稳随机变

量序列满足 $E\varepsilon_t=0$, $0<E\varepsilon_t^2<\infty$ 以及条件 (1.2.5), 那么定理 1.2.1 是正确的, 当且仅当以下假设之一成立:

(i) $\{\varepsilon_t; t\in Z^+\}$ 为一鞅差序列.

(ii) $\{\varepsilon_t; t\in Z^+\}$ 为一 ρ- 混合 (或 φ- 混合) 随机变量序列, 满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\rho(2^i)<\infty$ (或者 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varphi^{\frac{1}{2}}(2^i)<\infty$).

(iii) $\{\varepsilon_t; t\in Z^+\}$ 为一 α- 混合随机变量序列, 满足对某些 $\delta>0$ 和 $\theta>\dfrac{2+\delta}{\delta}$, 有 $E|\varepsilon_t|^{2+\delta}<\infty$ 以及 $\alpha(n)=O(n^{-\theta})$.

(iv) $\{\varepsilon_t; t\in Z^+\}$ 为一负相伴随机变量序列.

(v) $\{\varepsilon_t; t\in Z^+\}$ 为一正相伴随机变量序列.

证明 只需要分别验证序列 (i)-(v) 都满足条件 (1.3.1) 和 (1.3.2). (i) 容易证明. (ii) 首先注意到 $\rho(n)\leqslant\varphi^{\frac{1}{2}}(n)$. 然后参考 Shao (1989) 和 Shao (1995) 可以分别得到条件 (1.3.1) 和 (1.3.2). (iv) 我们参考 Su *et al.* (1997) 即可. (iii) Herrndorf (1984, 1985) 已经建立了结果 (1.3.2). 然后由 shao 和 Yu (1996) 的定理 4.1, 若对于 $2<p<r\leqslant\infty$ 以及 $\theta\geqslant\dfrac{pr}{2(r-p)}$, 有

$$E|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{i+m}|^p\leqslant Kn^{\frac{p}{2}}\max_{1\leqslant i\leqslant n}(E|\varepsilon_{i+m}|^r)^{\frac{p}{r}},\quad \forall n\geqslant 1, m\geqslant 1$$

以及再由 Móricz (1982) 中的一个定理,

$$E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_{m+1}+\cdots+\varepsilon_{m+k}|^p\leqslant K'n^{\frac{p}{2}}\max_{1\leqslant i\leqslant n}(E|\varepsilon_{i+m}|^r)^{\frac{p}{r}},\quad \forall n\geqslant 1, m\geqslant 1.$$

现在我们选择 $r=2+\delta$, 以及 p 足够接近 2 满足 $\theta>\dfrac{pr}{2(r-p)}>\dfrac{2+\delta}{\delta}$. 那么

$$E\max_{k\leqslant n}|\varepsilon_{m+1}+\cdots+\varepsilon_{m+k}|^2\leqslant(E\max_{k\leqslant n}|\varepsilon_{m+1}+\cdots+\varepsilon_{m+k}|^p)^{\frac{2}{p}}\leqslant Cn.$$

这样 (1.3.1) 证明完毕. (v) Newman 和 Wright (1981) 的文章中可以找到 (1.3.2)

的结果. 同样地, 他们还建立了以下的不等式

$$E\max_{k\leqslant n}(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k)^2\leqslant 2E(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n)^2.$$

非常显然

$$\begin{aligned}E(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n)^2 &= nE\varepsilon_1^2+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\mathrm{Cov}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\\ &\leqslant nE\varepsilon_1^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{\infty}\mathrm{Cov}(\varepsilon_1,\varepsilon_j)\leqslant 2n\sigma^2.\end{aligned}$$

那么马上就有

$$E\max_{k\leqslant n}(\varepsilon_{m+1}\cdots+\varepsilon_{m+k})^2=E\max_{k\leqslant n}(\varepsilon_1\cdots+\varepsilon_k)^2\leqslant 4n\sigma^2.$$

(1.3.1) 证明完毕.

§1.3.2 应用

定理 1.2.1 这样的弱收敛定理对于得到计量经济中一些重要统计量的极限分布起着非常关键的作用. 比如它可以应用于一种很常用的过程 — 单位根过程检验中统计量的极限分布.

我们定义以下过程 $\{y_t\}$:

$$y_t=\alpha y_{t-1}+X_t,\qquad t=1,2,\cdots \tag{1.3.3}$$

其中 y_0 以概率一为一常数. α 的最小二乘估计为:

$$\hat{\alpha}_n=\sum_{t=1}^{n}y_ty_{t-1}\Big/\sum_{t=1}^{n}y_t^2. \tag{1.3.4}$$

为了检验 $\alpha=1$ 对 $\alpha<1$, 最关键的一步就是要得到以下 DF(Dickey-Feller) 检验统计量的极限分布,

$$n(\hat{\alpha}_n-1)=\Big\{\sum_{t=1}^{n}y_{t-1}(y_t-y_{t-1})\Big\}\Big/\Big\{n^{-2}\sum_{t=1}^{n}y_{t-1}^2\Big\}. \tag{1.3.5}$$

Phillips (1987) 和 Wang 等 (2002) 得到了当 $\{X_t\}$ 为由 i.i.d. 随机变量序列产生的线性过程在一定条件下 $n(\hat{\alpha}_n - 1)$ 的极限分布. 而由定理 1.3.1, 我们还是可以得到相同的结果.

定理 1.3.2 *$\{X_t; t \in Z^+\}$ 为形如 (1.1.1) 式的平稳线性过程，其中 $\{a_j; j \in Z^+\}$ 为一实数序列满足 $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j| < \infty$. 假设 $\{\varepsilon_t; t \in Z^+\}$ 为一平稳随机变量序列满足 $E\varepsilon_t = 0$, $0 < E\varepsilon_t^2 < \infty$ 以及条件 (1.2.5), 那么如果满足定理 1.3.1 中 (i)–(v) 的任意一个条件，当 $n \to \infty$ 时，我们有*

(a) $\frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{\infty} y_{t-1}^2 \Rightarrow \tau^2 \int_0^1 W(r)^2 dr$;

(b) $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{\infty} y_{t-1}(y_t - y_{t-1}) \Rightarrow (\tau^2/2)(W(1)^2 - \gamma)$;

(c) $n(\hat{\alpha}_n - 1) \Rightarrow (W(1)^2 - \gamma)/(2\int_0^1 W(r)^2 dr)$;

(d) $\hat{\alpha}_n \to 1(P.)$;

(e) $t_\alpha \Rightarrow \gamma^{-1/2}(W(1)^2 - \gamma)/(2\{\int_0^1 W(r)^2 dr\}^{1/2})$. 其中

$$\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2/(\sum_{j=0}^{\infty} a_j)^2, \delta_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{\alpha}_n y_{t-1})^2, t_\alpha = (\sum_{t=1}^{n} y_{t-1}^2)^{1/2}(\hat{\alpha}_n - 1)/\delta_n.$$

此证明与 Phillips (1987) 的定理 2 证明相似. 在误差为 NA 序列时， Lu (2003) 得到了与定理 1.3.2 类似的结果.

第四节 由随机过程序列产生的线性过程部分和的弱收敛

§1.4.1 引言及主要结果

线性过程 $X_k=\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon_{k-j}$ 在时间序列分析中非常重要，它被广泛地应用于经济、工程以及物理各个学科中，对于此类线性过程已经得到了很多的极限结果，参见 Fakhre-Zakeri (1997) 及 Tae-Sung (2001). 在许多实际问题中， ε_j 不是一个简单的实值随机变量，而常常是一个过程 $\varepsilon_j(t)$. 本节讨论的是一列 ρ- 混合的过程序列 $\{\varepsilon_j(t);0\leqslant t\leqslant 1\}_{j=1}^{\infty}$ 产生的线性过程 $X_k(t)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon_{k-j}(t)$, 得到了部分和 $S_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k(t)$ 的弱收敛性、两参数随机过程 $Y_n(s,t)=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{[ns]}X_k(t)$ 的弱收敛性以及随机足标和 $S_{N_n}(t)$ 的弱收敛.

定义由随机过程序列产生的线性模型形式如 (1.1.2), 记部分和 $S_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\cdot X_k(t)$, 对任意的 $n\geqslant 1$ 再定义随机过程形式如 (1.1.3).

Lin 和 Li (2002) 将随机变量序列的混合性概念推广到了随机过程序列上.

定义 1.1(参见 Lin 和 Li (2002)) 称随机过程序列 $\{X_k(t),t\geqslant 0\}$, $k=$

$1,2,\cdots$，是 ρ- 混合的，如果当 $n\to\infty$ 时

$$\rho(n)\triangleq\sup_{k\geqslant 1}\sup_{X\in\mathcal{L}_2(\mathcal{F}_1^k),Y\in\mathcal{L}_2(\mathcal{F}_{k+n}^\infty)}\frac{|\mathrm{E}XY-\mathrm{E}X\mathrm{E}Y|}{\sqrt{VarXVarY}}\to 0,$$

其中 $\mathcal{F}_a^b=\sigma\{X_k(t),a\leqslant k\leqslant b,t\geqslant 0\}$，$\mathcal{L}_2(\mathcal{F})$ 为所有 $\mathcal{F}$ 可测的 2 阶矩有限的随机变量集.

在独立不同分布的情形，郑祖康 (1999) 首先讨论了 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\varepsilon_k(t)$ 的弱收敛. Lin 和 Li (2002) 改进了他们的结果并讨论了 ρ- 混合随机过程序列的弱收敛性，证明了下列定理.

定理 1.C 设 $\{\varepsilon_k(t);0\leqslant t\leqslant 1\}_{k=1}^\infty$ 为一列 ρ- 混合随机过程，满足以下条件：

(i) $\forall k\geqslant 1,\varepsilon_k(0)=0$;

(ii) $\forall k\geqslant 1,0\leqslant t\leqslant 1,E\varepsilon_k(t)=0$;

(iii) $\forall a,b\in R$(其中至少一数不为 0), $\forall s,t\in[0,1]$, $\exists$ 正极限

$$\sigma_{s,t}(a,b)\triangleq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n E(a\varepsilon_k(s)+b\varepsilon_k(t))^2>0;$$

(iv) $\exists\delta>0$ 和不减连续函数 $u(\cdot)(u(0)=0),\exists C>0$, 使得当 $s,t\in[0,1]$ 时有

$$\sup_{k\geqslant 1}E|\varepsilon_k(t)-\varepsilon_k(s)|^{2+\delta}\leqslant C|u(t)-u(s)|^{1+\frac{\delta}{2}};$$

(v) $\sum_{k=1}^\infty\rho(2^k)<\infty$,

则 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\varepsilon_k(t)$ 弱收敛于某 *Gauss* 过程.

本节的目的之一，在于讨论关于 (1.1.2) 所示的线性过程的类似极限定理，目的之二在于讨论随机足标和的中心极限定理与弱收敛性，我们得到了更一般的结论.

若假设线性模型 (1.1.2) 中 $\{\varepsilon_k(t); 0 \leqslant t \leqslant 1\}_{k=1}^{\infty}$ 为一列 ρ- 混合随机过程，并且满足定理 1.C 中的条件 (i)–(v), 则对于线性模型的部分和 $S_n(t)$ 可以证明如下弱收敛定理.

定理 1.4.1 *设线性过程* $\{X_k(t); 0 \leqslant t \leqslant 1\}_{k=1}^{\infty}$ *形如 (1.1.2) 式，其中* $\{a_j; j \geqslant 0\}$ *为实数序列满足* $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j| < \infty$, $\{\varepsilon_k(t); 0 \leqslant t \leqslant 1\}_{k=1}^{\infty}$ *为一列* ρ- *混合随机过程，且满足定理 1.C 中的条件* (i)–(v), *则* $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n(t)$ *弱收敛于某 Gauss 过程* $G(t)$.

为了得到随机足标和的极限定理，我们需要讨论 (1.1.3) 所示的两参数过程 $Y_n(s,t)$ 的弱收敛.

定理 1.4.2 *设随机过程* $Y_n(s,t)$ *形如 (1.1.3) 式，若* $\{X_k(t); 0 \leqslant t \leqslant 1\}_{k=1}^{\infty}$ *为形如 (1.1.2) 式的线性过程，其中* $\{a_j; j \geqslant 0\}$ *为实数序列满足* $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j| < \infty$, $\{\varepsilon_k(t); 0 \leqslant t \leqslant 1\}_{k=1}^{\infty}$ *为一列* ρ- *混合随机过程，且满足定理 1.C 中的条件* (i)–(v), *则* $Y_n(s,t)$ *弱收敛于某两参数 Gauss 过程* $G(s,t)$.

定理 1.4.3 *设随机过程* $Y_n(s,t)$ *形如 (1.1.3) 式，若* $\{X_k(t); 0 \leqslant t \leqslant 1\}_{k=1}^{\infty}$ *为形如 (1.1.2) 式的线性过程，其中* $\{a_j; j \geqslant 0\}$ *为实数序列满足* $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j| < \infty$, $\{\varepsilon_k(t); 0 \leqslant t \leqslant 1\}_{k=1}^{\infty}$ *为一列* ρ- *混合随机过程，若* $\frac{N_n}{a_n} \xrightarrow{p} \theta$, *其中* θ *为一正的随机变量，* a_n *为趋向于无穷的常数序列，且* $Y_n(s,t)$ *满足定理 1.C 中的条件* (i)-(v), *则* $Y_{N_n}(s,t)$ *弱收敛于定理 1.4.2 中所示的 Gauss 过程* $G(s,t)$.

特别地，$\frac{1}{\sqrt{N_n}}S_{N_n}(t)$ 弱收敛于定理 1.4.1 中所示的 Gauss 过程 $G(t)$.

注 1.4.1 若取 $a_0=1, a_j=0, j\neq 0$, 则有 $X_k(t)=\varepsilon_k(t)$. 故定理 1.C 是我们的特例, 并且由定理 1.4.3, 若 $\frac{N_n}{a_n}\xrightarrow{p}\theta$, θ 为一正的随机变量, 则在定理 1.C 的条件下, $\frac{1}{\sqrt{N_n}}\sum_{k=1}^{N_n}\varepsilon_k(t)$ 弱收敛于某一 Gauss 过程.

§1.4.2 定理 1.4.1 的证明

为了证明定理 1.4.1, 我们需要定义另一种形式的线性过程:

$$\widetilde{X}_k(t)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon_k(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\tag{1.4.1}$$

其中 $\{a_j;j\geqslant 0\}$ 和 $\{\varepsilon_k(t);0\leqslant t\leqslant 1\}_{k=1}^{\infty}$ 与 (1.1.2) 中的 $X_k(t)$ 定义相同.

引理 1.4.1 设 $\{X_k(t);0\leqslant t\leqslant 1\}_{k=1}^{\infty}$ 为一列形如 (1.1.2) 式的线性过程, $\{\widetilde{X}_k(t);0\leqslant t\leqslant 1\}_{k=1}^{\infty}$ 为一列形如 (1.4.1) 式的线性过程, 其中 $\{a_j;j\geqslant 0\}$ 为实数序列满足 $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|<\infty$, $\{\varepsilon_k(t);0\leqslant t\leqslant 1\}_{k=1}^{\infty}$ 为一列均值为零的 ρ-混合随机过程, 且满足定理 1.C 中的条件 (iv). 记 $\widetilde{S}_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{X}_k(t)$, 则

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\widetilde{S}_k(t)-S_k(t)|\xrightarrow{P}0\quad(n\to\infty).\tag{1.4.2}$$

为了证明引理 1.4.1 我们需要下列引理.

引理 1.4.2(参见陆传荣 (1997)) 设 $\{X_k;k\geqslant 1\}$ 为一 ρ- 混合的随机变量序列, 对任意的 k, $EX_k=0$, $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}E|X_k|^{2+\alpha}<\infty$, 其中 $\alpha>0$, 假设 $\sum_{k=1}^{\infty}\rho(2^k)<\infty$, 则存在常数 $B_{2+\alpha}>0$ 使得

$$E|\sum_{k=1}^{n}X_k|^{2+\alpha}\leqslant B_{2+\alpha}n^{\frac{\alpha}{2}}\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^{2+\alpha},\tag{1.4.3}$$

和

$$E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k}X_i|^{2+\alpha}\leqslant B_{2+\alpha}n^{1+\frac{\alpha}{2}}\max_{1\leqslant k\leqslant n}E|X_k|^{2+\alpha}. \tag{1.4.4}$$

令 $\{\xi_k(t),k=1,2,\cdots\}$ 为一随机过程序列, $S_k^{'}(t)=\xi_1(t)+\cdots+\xi_k(t)$, 对于给定的 t, 记 $M_m(t)=\max_{1\leqslant k\leqslant m}|S_k^{'}(t)|$

引理 1.4.3 对任意的 $\gamma\geqslant 0$ 及 $\alpha>1$, 若存在非负常数 $u_1,u_2,\cdots,u_m,\forall\lambda>0$ 满足

$$P\{\sup_t|S_j^{'}(t)-S_i^{'}(t)|\geqslant\lambda\}\leqslant\frac{1}{\lambda^{\gamma}}(\sum_{i<l\leqslant j}u_l)^{\alpha},0\leqslant i\leqslant j\leqslant m,$$

那么

$$P\{\sup_t M_m(t)\geqslant\lambda\}\leqslant\frac{K_{\gamma,\alpha}^{'}}{\lambda^{\gamma}}(u_1+\cdots+u_m)^{\alpha},$$

其中 $K_{\gamma,\alpha}^{'}$ 为仅依赖于 γ 和 α 的常数.

证明 参照文献 Billingsley (1968) 中定理 12.2 的证明方法可以得证.

引理 1.4.1 的证明 令 $Z_k(t)=\widetilde{S}_k(t)-S_k(t)$, 则 $Z_k(t)-Z_k(s)=(\widetilde{S}_k(t)-S_k(t))-(\widetilde{S}_k(s)-S_k(s))$. 而

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_k(t)&=\sum_{u=1}^{k}\widetilde{X}_u(t)=\sum_{u=1}^{k}(\sum_{j=0}^{\infty}a_j)\varepsilon_u(t)\\&=\sum_{u=1}^{k}(\sum_{j=0}^{k-u}a_j)\varepsilon_u(t)+\sum_{u=1}^{k}(\sum_{j=k-u+1}^{\infty}a_j)\varepsilon_u(t)\\&=\sum_{u=1}^{k}(\sum_{j=0}^{u-1}a_j\varepsilon_{u-j}(t))+\sum_{u=1}^{k}(\sum_{j=k-u+1}^{\infty}a_j)\varepsilon_u(t),\end{aligned}$$

那么 $\widetilde{S}_k(t)-S_k(t)=-\sum_{u=1}^{k}(\sum_{j=u}^{\infty}a_j\varepsilon_{u-j}(t))+\sum_{u=1}^{k}(\sum_{j=k-u+1}^{\infty}a_j)\varepsilon_u(t)$,

$$
\begin{aligned}
Z_k(t)-Z_k(s) &= (-\sum_{u=1}^{k}(\sum_{j=u}^{\infty}a_j\varepsilon_{u-j}(t))+\sum_{u=1}^{k}(\sum_{j=k-u+1}^{\infty}a_j)\varepsilon_u(t)) \\
&\quad -(-\sum_{u=1}^{k}(\sum_{j=u}^{\infty}a_j\varepsilon_{u-j}(s))+\sum_{u=1}^{k}(\sum_{j=k-u+1}^{\infty}a_j)\varepsilon_u(s)) \\
&= \sum_{u=1}^{k}(\sum_{j=k-u+1}^{\infty}a_j)(\varepsilon_u(t)-\varepsilon_u(s))-\sum_{u=1}^{k}\sum_{j=u}^{\infty}a_j(\varepsilon_{u-j}(t)-\varepsilon_{u-j}(s)).
\end{aligned}
$$

由 c_r 不等式

$$
\begin{aligned}
& E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\frac{1}{\sqrt{n}}(Z_k(t)-Z_k(s))|^{2+\delta} \\
= & E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{u=1}^{k}(\sum_{j=k-u+1}^{\infty}a_j)(\varepsilon_u(t)-\varepsilon_u(s)) \\
& -\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{u=1}^{k}\sum_{j=u}^{\infty}a_j(\varepsilon_{u-j}(t)-\varepsilon_{u-j}(s))|^{2+\delta} \\
\leqslant & C_{2+\delta}(E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{u=1}^{k}(\sum_{j=k-u+1}^{\infty}a_j)(\varepsilon_u(t)-\varepsilon_u(s))|^{2+\delta} \\
& +E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{u=1}^{k}\sum_{j=u}^{\infty}a_j(\varepsilon_{u-j}(t)-\varepsilon_{u-j}(s))|^{2+\delta}) \\
\triangleq & C_{2+\delta}(E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}|^{2+\delta}+E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{II}|^{2+\delta}). \qquad (1.4.5)
\end{aligned}
$$

记 $\mathrm{I}\triangleq\mathrm{I}_{n_1}+\mathrm{II}_{n_2}$, 且令 $\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)=\varepsilon_k(t)-\varepsilon_k(s)$, 其中

$$
\mathrm{I}_{n_1}=\frac{1}{\sqrt{n}}[a_1\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)+a_2(\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)+\widetilde{\varepsilon}_{k-1}(s,t))+\cdots+a_k(\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)+\cdots+\widetilde{\varepsilon}_1(s,t))],
$$

$$
\mathrm{I}_{n_2}=\frac{1}{\sqrt{n}}[(a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots)(\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)+\cdots+\widetilde{\varepsilon}_1(s,t))].
$$

首先对于 I_{n_2}, 令 $\{p_n\}$ 为一列正整数序列满足 $p_n \to \infty$ 以及 $p_n/n \to 0 \quad (n \to \infty)$, 由引理 1.4.2 与定理 1.C 中条件 (iv), $\exists\, \delta > 0$ 和不减连续函数 $u(\cdot)(u(0)=0)$, $\forall\, n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned}
& E \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\mathrm{I}_{n_2}|^{2+\delta} \\
\leqslant\ & n^{-\frac{2+\delta}{2}} E \max_{1\leqslant k\leqslant n} |(\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j)(\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)+\cdots+\widetilde{\varepsilon_1}(s,t))|^{2+\delta} \\
\leqslant\ & n^{-\frac{2+\delta}{2}} (\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|)^{2+\delta} E \max_{1\leqslant k\leqslant p_n} |\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)+\cdots+\widetilde{\varepsilon_1}(s,t)|^{2+\delta} \\
& + n^{-\frac{2+\delta}{2}} (\sum_{j>p_n} |a_j|)^{2+\delta} E \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)+\cdots+\widetilde{\varepsilon_1}(s,t)|^{2+\delta} \\
\leqslant\ & n^{-\frac{2+\delta}{2}} (\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|)^{2+\delta} B_{2+\delta} p_n^{\frac{2+\delta}{2}} \sup_{k\geqslant 1} E|\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)|^{2+\delta} \\
& + n^{-\frac{2+\delta}{2}} (\sum_{j>p_n}^{\infty} |a_j|)^{2+\delta} B_{2+\delta} n^{\frac{2+\delta}{2}} \sup_{k\geqslant 1} E|\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)|^{2+\delta} \\
\leqslant\ & B_{2+\delta} C (\frac{p_n}{n})^{\frac{2+\delta}{2}} (\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|)^{2+\delta} |u(t)-u(s)|^{1+\frac{\delta}{2}} \\
& + B_{2+\delta} C (\sum_{j>p_n}^{\infty} |a_j|)^{2+\delta} |u(t)-u(s)|^{1+\frac{\delta}{2}} \\
=\ & C_n |u(t)-u(s)|^{1+\frac{\delta}{2}} \\
& (C_n\text{为与 } n \text{ 有关的常数}, C_n \to 0 (n\to\infty)).
\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

对于 I_{n_1}, 任给 $1 \leqslant m < k$, 令 $\mathrm{I}_{n_{1,m}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}[a_1\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)+a_2(\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)+\widetilde{\varepsilon}_{k-1}(s,t))+\cdots+a_m(\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)+\cdots+\widetilde{\varepsilon}_{k-m+1}(s,t))]$, 则由引理 1.4.2 及定理 1.C 中条件 (iv) 可

得，$\forall n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned}
& E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{n_{1,m}}|^{2+\delta} \\
\leqslant\ & n^{-\frac{2+\delta}{2}}(\sum_{j=1}^{m}|a_j|)^{2+\delta}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)+\cdots+\widetilde{\varepsilon}_{k-m+1}(s,t)|^{2+\delta} \\
\leqslant\ & n^{-\frac{2+\delta}{2}}(\sum_{j=1}^{m}|a_j|)^{2+\delta}B_{2+\delta}m^{\frac{2+\delta}{2}}\sup_{k\geqslant 1}E|\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)|^{2+\delta} \\
\leqslant\ & B_{2+\delta}C(\sum_{j=1}^{m}|a_j|)^{2+\delta}(\frac{m}{n})^{\frac{2+\delta}{2}}|u(t)-u(s)|^{1+\frac{\delta}{2}}.
\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}
\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{n_{1,m}}-\mathrm{I}_{n_1}| &= \frac{1}{\sqrt{n}}\max_{m<k\leqslant n}|\sum_{j=m+1}^{k}a_j(\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)+\cdots+\widetilde{\varepsilon}_{k-j+1}(s,t))| \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\max_{m<k\leqslant n}(\sum_{j=m+1}^{k}|a_j|\max_{m<j\leqslant k}|\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)+\cdots+\widetilde{\varepsilon}_{k-j+1}(s,t)|) \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\max_{m<k\leqslant n}(\sum_{j=m+1}^{k}|a_j|\max_{m<j\leqslant k}|\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)+\cdots+\widetilde{\varepsilon}_1(s,t)|) \\
&\quad +\frac{1}{\sqrt{n}}|\max_{m<k\leqslant n}(\sum_{j=m+1}^{k}a_j)\max_{m<j\leqslant k}(\widetilde{\varepsilon}_1(s,t)+\cdots+\widetilde{\varepsilon}_{k-j}(s,t))| \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}(\sum_{j=m+1}^{n}|a_j|)\max_{m<k\leqslant n}|\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)+\cdots+\widetilde{\varepsilon}_1(s,t)| \\
&\quad +\frac{1}{\sqrt{n}}(\sum_{j=m+1}^{n}|a_j|)\max_{m<k\leqslant n}\max_{m<j\leqslant k}|\widetilde{\varepsilon}_1(s,t)+\cdots+\widetilde{\varepsilon}_{k-j}(s,t)| \\
&\leqslant 2\frac{1}{\sqrt{n}}(\sum_{j=m+1}^{n}|a_j|)\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)+\cdots+\widetilde{\varepsilon}_1(s,t)|, \qquad (1.4.7)
\end{aligned}$$

因此，

$$
\begin{aligned}
& E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{n_{1,m}}-\mathrm{I}_{n_1}|^{2+\delta} \\
\leqslant\ & 2^{2+\delta}n^{-\frac{2+\delta}{2}}(\sum_{j=m+1}^{n}|a_j|)^{2+\delta}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\widetilde{\varepsilon}_1(s,t)+\cdots+\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)|^{2+\delta} \\
\leqslant\ & B_{2+\delta}2^{2+\delta}n^{-\frac{2+\delta}{2}}(\sum_{j=m+1}^{n}|a_j|)^{2+\delta}n^{\frac{2+\delta}{2}}\sup_{k\geqslant 1}E|\widetilde{\varepsilon}_k(s,t)|^{2+\delta} \\
\leqslant\ & B_{2+\delta}C2^{2+\delta}(\sum_{j=m+1}^{n}|a_j|)^{2+\delta}|u(t)-u(s)|^{1+\frac{\delta}{2}}.
\end{aligned}
\tag{1.4.8}
$$

取 $m=[\sqrt{n}]$, 由 (1.4.6)、(1.4.7) 和 (1.4.8) 式，$E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}|^{2+\delta}\leqslant C_{2+\delta}(E|\mathrm{I}_{n_1}|^{2+\delta}+E|\mathrm{I}_{n_2}|^{2+\delta})\leqslant 2C_{2+\delta}C_n|u(t)-u(s)|^{1+\frac{\delta}{2}}$, 其中 C_n为仅与 n 有关的常数，且 $C_n\to 0\ (n\to\infty)$.

$$
\mathrm{II}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{u=1}^{k}\sum_{j=u}^{\infty}a_j(\varepsilon_{u-j}(t)-\varepsilon_{u-j}(s)),
$$

令 $\widetilde{\varepsilon}_{k-j}(s,t)=\varepsilon_{k-j}(t)-\varepsilon_{k-j}(s)$, 则由 Minkowski 不等式，引理 1.4.2 以及定理 1.C 中条件 (iv), $\forall\ n\geqslant n_0$,

$$
\begin{aligned}
E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{II}|^{2+\delta} &= n^{-\frac{2+\delta}{2}}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{u=1}^{k}\sum_{j=u}^{\infty}a_j\widetilde{\varepsilon}_{u-j}(s,t)|^{2+\delta} \\
&= n^{-\frac{2+\delta}{2}}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{u=1}^{j\wedge k}a_j\widetilde{\varepsilon}_{u-j}(s,t)|^{2+\delta} \\
&\leqslant n^{-\frac{2+\delta}{2}}(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\{E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{u=1}^{j\wedge k}\widetilde{\varepsilon}_{u-j}(s,t)|^{2+\delta}\}^{\frac{1}{2+\delta}})^{2+\delta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant n^{-\frac{2+\delta}{2}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\{B_{2+\delta}(j\wedge n)^{\frac{2+\delta}{2}}\sup_{k\geqslant 1}E|\widetilde{\varepsilon}_{k-j}(s,t)|^{2+\delta}\}^{\frac{1}{2+\delta}}\Big)^{2+\delta}\\
&\leqslant n^{-\frac{2+\delta}{2}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|B_{2+\delta}^{\frac{1}{2+\delta}}(j\wedge n)^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2+\delta}}|u(t)-u(s)|^{\frac{1}{2}}\Big)^{2+\delta}\\
&= B_{2+\delta}C\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\Big)^{2+\delta}\Big(\frac{j\wedge n}{n}\Big)^{\frac{2+\delta}{2}}|u(t)-u(s)|^{\frac{2+\delta}{2}}\\
&= C_n|u(t)-u(s)|^{1+\frac{\delta}{2}}\quad(\text{当}n\to\infty\text{时}, C_n\to 0).
\end{aligned}
$$

则由 (1.4.5) 式

$$
E\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\frac{1}{\sqrt{n}}(Z_k(t)-Z_k(s))\Big|^{2+\delta}\leqslant C'_{2+\delta}C_n|u(t)-u(s)|^{1+\frac{\delta}{2}}=C_n|u(t)-u(s)|^{1+\frac{\delta}{2}},
$$

即

$$
P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\frac{1}{\sqrt{n}}(Z_k(t)-Z_k(s))\Big|\geqslant\epsilon\}\leqslant\epsilon^{-(2+\delta)}C_n|u(t)-u(s)|^{1+\frac{\delta}{2}}. \tag{1.4.9}
$$

这样由引理 1.4.3 以及 (1.4.9) 式立即可得

$$
P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\max_{1\leqslant i\leqslant[\frac{m}{\eta}]}\Big|\frac{1}{\sqrt{n}}(Z_k(\frac{i}{m}\eta)-Z_k(0))\Big|\geqslant\epsilon\}\leqslant K\epsilon^{-(2+\delta)}C_n|u(1)-u(0)|^{1+\frac{\delta}{2}},
$$

令 $m\to\infty$, 又因为 $u(t)$ 为不减连续函数，所以 $|u(1)|^{1+\frac{\delta}{2}}\leqslant C$ (C 为常数), 因此可得

$$
\sup_{n\geqslant n_0}P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\Big|\frac{1}{\sqrt{n}}(Z_k(t)-Z_k(0))\Big|\geqslant\epsilon\}\leqslant KC\epsilon^{-(2+\delta)}\sup_{n\geqslant n_0}C_n.
$$

则

$$
\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\frac{1}{\sqrt{n}}Z_k(t)\Big|\xrightarrow{P}0\quad(n\to\infty)
$$

成立. 引理 1.4.1 证明完毕.

定理 1.4.1 的证明 引理 1.4.1 说明 $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n(t)$ 与 $\frac{1}{\sqrt{n}}\widetilde{S}_n(t)$ 的收敛性相同，因此我们只要讨论 $\frac{1}{\sqrt{n}}\widetilde{S}_n(t)$ 的收敛性即可.

我们将 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{X}_k(t)$ 中的线性过程 $\{\widetilde{X}_k(t);0\leqslant t\leqslant 1\}_{k=1}^{\infty}$ 看作定理 1.C 中的随机过程. 由于产生线性过程的 $\{\varepsilon_k(t);0\leqslant t\leqslant 1\}_{k=1}^{\infty}$ 为 ρ- 混合随机过程, 因此 $\{\widetilde{X}_k(t);0\leqslant t\leqslant 1\}_{k=1}^{\infty}$ 也为一列 ρ- 混合随机过程. 那么只要验证定理 1.C 中的四个条件是否满足即可.

(i)′ $\forall\ k\geqslant 1, \widetilde{X}_k(0)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon_k(0)=0$;

(ii)′ $\forall\ k\geqslant 1, 0\leqslant t\leqslant 1, E\widetilde{X}_k(t)=E\sum_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon_k(t)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jE\varepsilon_k(t)=0$;

(iii)′ $\forall\ a,b\in R$(其中至少一数不为 0), $\forall\ s,t\in[0,1]$, $\exists$ 正极限

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(a\widetilde{X}_k(s)+b\widetilde{X}_k(t))^2\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(a\sum_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon_k(s)+b\sum_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon_k(t))^2\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(a'\varepsilon_k(s)+b'\varepsilon_k(t))^2\triangleq\sigma_{s,t}(a',b'),
\end{aligned}
$$

其中 $a'=a\sum_{j=0}^{\infty}a_j,\quad b'=b\sum_{j=0}^{\infty}a_j$;

(iv)′ $\exists\ \delta>0$ 和不减连续函数 $u(\cdot)(u(0)=0),\exists\ C'>0$, 使得当 $s,t\in[0,1]$ 时有

$$
\begin{aligned}
&\sup_{k\geqslant 1}E|\widetilde{X}_k(t)-\widetilde{X}_k(s)|^{2+\delta}\\
=&\sup_{k\geqslant 1}E|\sum_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon_k(t)-\sum_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon_k(s)|^{2+\delta}\\
\leqslant&(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|)^{2+\delta}\sup_{k\geqslant 1}E|\varepsilon_k(t)-\varepsilon_k(s)|^{2+\delta}\leqslant C'|u(t)-u(s)|^{1+\frac{\delta}{2}},
\end{aligned}
$$

其中 $C'=C(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|)^{2+\delta}$, C 为定理 1.C 中条件 (iv) 的常数.

因此定理 1.C 中条件 (i)-(iv) 满足，则 $\frac{1}{\sqrt{n}}\widetilde{S}_n(t)$ 弱收敛于某 Gauss 过程，根据引理 1.4.1 有 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\widetilde{S}_n(t)-S_n(t)|\xrightarrow{P}0(n\to\infty)$. 立即可得 $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n(t)$ 也弱收敛于某 Gauss 过程. 定理证明完毕.

§1.4.3　定理 1.4.2 的证明

为了证明定理 1.4.2, 我们需要定义另一种形式的随机过程

$$\widetilde{Y}_n(s,t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\widetilde{S}_{[ns]}(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{[ns]}\widetilde{X}_k(t),\quad 0\leqslant s,t\leqslant 1. \tag{1.4.10}$$

引理 1.4.4(参见林正炎、陆传荣和苏中根 (1999))　设 $\{(X_n^{(1)},X_n^{(2)},\cdots,X_n^{(k)})\}$ 为随机向量序列，$(X_0^{(1)},X_0^{(2)},\cdots,X_0^{(k)})$ 为一随机向量，若对任意的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$, 有

$$a_1X_n^{(1)}+a_2X_n^{(2)}+\cdots+a_kX_n^{(k)}\xrightarrow{d}a_1X_0^{(1)}+a_2X_0^{(2)}+\cdots+a_kX_0^{(k)},$$

则

$$(X_n^{(1)},X_n^{(2)},\cdots,X_n^{(k)})\xrightarrow{d}(X_0^{(1)},X_0^{(2)},\cdots,X_0^{(k)}).$$

引理 1.4.5(参见陆传荣和林正炎 (1997))　设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是 ρ 混合序列，$EX_n=0,EX_n^2<\infty$ 且

(i) $\lim_{n\to\infty}ES_n^2/n=\sigma^2>0$;

(ii) $\{X_n^2,n\geqslant 1\}$ 一致可积;

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\rho(2^n)<\infty$.

那么 $W_n \Rightarrow W$, 其中 $W_n(t) = S_{[nt]}/\sigma\sqrt{n},\ \ 0 \leqslant t \leqslant 1$.

引理 1.4.6(参见 Billingsley(1968)) 对任意的 $\gamma \geqslant 0$ 及 $\alpha > 1$, 若存在非负常数 $u_1, u_2, \cdots, u_m, \forall\ \lambda > 0$ 满足

$$P\{|S_j - S_i| \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{1}{\lambda^\gamma}(\sum_{i<l\leqslant j} u_l)^\alpha, 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant m,$$

那么

$$P\{M_m \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{K'_{\gamma,\alpha}}{\lambda^\gamma}(u_1 + \cdots + u_m)^\alpha,$$

其中 $K'_{\gamma,\alpha}$ 为仅依赖于 γ 和 α 的常数.

定理 1.4.2 的证明 引理 1.4.1 的形式稍作变换, 即 $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\widetilde{Y_n}(s,t) - Y_n(s,t)| \xrightarrow{P} 0(n \to \infty)$, 这说明过程 $Y_n(s,t)$ 的收敛性与 $\widetilde{Y_n}(s,t)$ 相同. 因此我们只需要证明过程 $\widetilde{Y}_n(s,t)$ 弱收敛于某两参数 Gauss 过程.

首先证明 $\widetilde{Y}_n(s,t)$ 的任意有限维分布收敛于某 Gauss 过程相应的有限维分布. 以二维为例, 对任意的实数 a, b, 以及 $s_1, s_2, t_1, t_2 \in [0,1]$,

$$a\widetilde{Y}_n(s_1,t_1) + b\widetilde{Y}_n(s_2,t_2) = \frac{1}{\sqrt{n}}(a\sum_{k=1}^{[ns_1]}\widetilde{X}_k(t_1) + b\sum_{k=1}^{[ns_2]}\widetilde{X}_k(t_2)).$$

不失一般性, 假设 $s_1 < s_2$, 记

$$Y_k = a\widetilde{X}_k(t_1) + b\widetilde{X}_k(t_2), \quad 若\ k \leqslant [ns_1];$$

$$Y_k = b\widetilde{X}_k(t_2), \quad 若\ [ns_1] < k \leqslant [ns_2].$$

令

$$\mathcal{A}_a^b = \sigma\{Y_j, a \leqslant j \leqslant b\},$$

$$\rho_1(n) \triangleq \sup_{k\geqslant 1}\sup_{X\in\mathcal{L}_2(\mathcal{A}_1^k), Y\in\mathcal{L}_2(\mathcal{A}_{k+n}^\infty)}\frac{|\mathsf{E}XY - \mathsf{E}X\mathsf{E}Y|}{\sqrt{\mathsf{Var}X\cdot\mathsf{Var}Y}},$$

马上可得

$$\mathcal{A}_a^b \subset \mathcal{F}_a^b, \quad \rho_1(n) \leqslant \rho(n),$$

其中 $\rho(n)$ 及 $\mathcal{F}_a^b$ 与定义 1.2.1 中相同. 因此, (a) 若 $\rho(n) \to 0(n \to \infty)$, 那么 $\rho_1(n) \to 0(n \to \infty)$, 这说明 $\{Y_k; k = 1, 2, \cdots\}$ 为一 ρ- 混合序列; (b) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(2^n) < \infty$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_1(2^n) < \infty$. 同 Lin 和 Li (2002) 中的定理 2.1 的证明方法, 由引理 1.4.5 及条件 (iii) 立即可得存在 $\overline{\sigma}^2$ 使得

$$a\widetilde{Y}_n(s_1, t_1) + b\widetilde{Y}_n(s_2, t_2) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[ns_2]} Y_k \xrightarrow{d} N(0, \overline{\sigma}^2).$$

由引理 1.4.4 可知, $(\widetilde{Y}_n(s_1, t_1), \widetilde{Y}_n(s_2, t_2))$ 依分布收敛于二维的正态分布向量. 类似地可以证明 $\{\widetilde{Y}_n(s, t)\}$ 的任意有限维分布收敛于多维的正态分布.

所以为了证明结论, 由 Prohorov 定理只需证 $\{\widetilde{Y}_n(s, t)\}$ 的分布是胎紧的. 我们只需证对任意的 $\epsilon > 0$, $n \geqslant 1$,

$$\lim_{\eta \to 0} P(\omega_\eta(\widetilde{Y}_n(s, t)) \geqslant \epsilon) = 0,$$

其中

$$\omega_\eta(\widetilde{Y}_n(s, t)) = \sup_{\substack{|s_2 - s_1| < \eta \\ |t_2 - t_1| < \eta}} |\widetilde{Y}_n(s_2, t_2) - \widetilde{Y}_n(s_1, t_1)|.$$

而 $\omega_\eta(\widetilde{Y}_n(s, t)) \leqslant \sup\limits_{0 \leqslant t_2 \leqslant 1} \sup\limits_{|s_2 - s_1| < \eta} |\widetilde{Y}_n(s_2, t_2) - \widetilde{Y}_n(s_1, t_2)| + \sup\limits_{0 \leqslant s_1 \leqslant 1} \sup\limits_{|t_2 - t_1| < \eta} |\widetilde{Y}_n(s_1, t_2) - \widetilde{Y}_n(s_1, t_1)|$.

因此只需证明, 对任意的 $\epsilon > 0$, $n \geqslant 1$,

$$\lim_{\eta \to 0} P(\sup_{0 \leqslant t_2 \leqslant 1} \sup_{|s_2 - s_1| < \eta} |\widetilde{Y}_n(s_2, t_2) - \widetilde{Y}_n(s_1, t_2)| \geqslant \epsilon) = 0 \tag{1.4.11}$$

以及

$$\lim_{\eta \to 0} P(\sup_{0 \leqslant s_1 \leqslant 1} \sup_{|t_2 - t_1| < \eta} |\widetilde{Y}_n(s_1, t_2) - \widetilde{Y}_n(s_1, t_1)| \geqslant \epsilon) = 0 \tag{1.4.12}$$

成立.

为了证明 (1.4.11) 式，只需证

$$\lim_{\eta\to 0}\sup_n \sum_{i<\eta^{-1}} P(\sup_{0\leqslant t_2\leqslant 1}\sup_{i\eta\leqslant s_2\leqslant (i+1)\eta}|\widetilde{Y}_n(s_2,t_2)-\widetilde{Y}_n(s_1,t_2)|\geqslant \epsilon)=0.$$

我们先证明下式

$$\begin{aligned}&P\{\sup_{0\leqslant t_2\leqslant 1}|\widetilde{Y}_n(s_2,t_2)-\widetilde{Y}_n(s_1,t_2)|\geqslant \epsilon\}\\ \leqslant\ &\frac{C}{\epsilon^{2+\delta}}n^{-(1+\delta/2)}([ns_2]-[ns_1])^{1+\delta/2}|u(1)|^{1+\delta/2}.\end{aligned}\tag{1.4.13}$$

令

$$U_n(s_1,s_2,t_2)=\widetilde{Y}_n(s_2,t_2)-\widetilde{Y}_n(s_1,t_2)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=[ns_1]+1}^{[ns_2]}\widetilde{X}_k(t_2),\quad U_n(s_1,s_2,0)=0,$$

那么由引理 1.4.2 及条件 (iv)

$$\begin{aligned}&P\{|U_n(s_1,s_2,t_2)-U_n(s_1,s_2,t_1)|\geqslant \epsilon\}\\ \leqslant\ &\epsilon^{-(2+\delta)}E|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=[ns_1]+1}^{[ns_2]}(\widetilde{X}_k(t_2)-\widetilde{X}_k(t_1))|^{2+\delta}\\ \leqslant\ &\frac{n^{-(1+\delta/2)}C}{\epsilon^{2+\delta}}([ns_2]-[ns_1])^{1+\delta/2}|u(t_2)-u(t_1)|^{1+\delta/2}.\end{aligned}$$

令

$$\xi_i=U_n(s_1,s_2,\frac{i}{m}\eta)-U_n(s_1,s_2,\frac{i-1}{m}\eta),u_i=K_{n,\delta}u(\frac{i}{m}\eta)-K_{n,\delta}u(\frac{i-1}{m}\eta),$$
$$i=1,2,\cdots,[\frac{m}{\eta}],\ \text{其中}K_{n,\delta}=(n^{-(1+\delta/2)}C([ns_2]-[ns_1])^{1+\delta/2})^{\frac{2}{2+\delta}}.$$

由引理 1.4.6, 可得

$$\begin{aligned}&P\{\max_{1\leqslant i\leqslant [\frac{m}{\eta}]}|U_n(s_1,s_2,\frac{i}{m}\eta)-U_n(s_1,s_2,0)|\geqslant \epsilon\}\\ \leqslant\ &\frac{n^{-(1+\delta/2)}C}{\epsilon^{2+\delta}}([ns_2]-[ns_1])^{1+\delta/2}|u(1)-u(0)|^{1+\delta/2}\\ \leqslant\ &\frac{n^{-(1+\delta/2)}C}{\epsilon^{2+\delta}}([ns_2]-[ns_1])^{1+\delta/2}|u(1)-u(0)|^{1+\delta/2}.\end{aligned}$$

令 $m\to\infty$, 立即可得 (1.4.13). 由引理 1.4.3 及 (1.4.13) 式，有

$$P\{\sup_{0\leqslant t_2\leqslant 1}\max_{1\leqslant j\leqslant m}|\widetilde{Y}_n(i\eta+\frac{j}{m}\eta,t_2)-\widetilde{Y}_n(i\eta,t_2)|\geqslant\epsilon\}$$

$$\leqslant\frac{Cn^{-(1+\delta/2)}}{\epsilon^{2+\delta}}([n(i+1)\eta]-[ni\eta])^{1+\delta/2}|u(1)|^{1+\delta/2}.$$

令 $m\to\infty$, 立即可得

$$P\{\sup_{0\leqslant t_2\leqslant 1}\sup_{i\eta\leqslant s_2\leqslant(i+1)\eta}|\widetilde{Y}_n(s_2,t_2)-\widetilde{Y}_n(s_1,t_2)|\geqslant\epsilon\}$$

$$\leqslant\frac{Cn^{-(1+\delta/2)}}{\epsilon^{2+\delta}}([n(i+1)\eta]-[ni\eta])^{1+\delta/2}|u(1)|^{1+\delta/2}.$$

因此,

$$\sum_{i<\eta^{-1}}P\{\sup_{0\leqslant t_2\leqslant 1}\sup_{i\eta\leqslant s_2\leqslant(i+1)\eta}|\widetilde{Y}_n(s_2,t_2)-\widetilde{Y}_n(s_1,t_2)|\geqslant\epsilon\}$$

$$\leqslant\quad\frac{C|u(1)|^{1+\delta/2}n^{-(1+\delta/2)}}{\epsilon^{2+\delta}}\max_{i<\eta^{-1}}([n(i+1)\eta]-[ni\eta])^{1+\delta/2}\leqslant\frac{C'|u(1)|^{1+\delta/2}}{\epsilon^{2+\delta}}\eta^{\delta/2}.$$

这样我们证明了 (1.4.11) 式.

为了证明 (1.4.12), 只需证明

$$\lim_{\eta\to 0}\sup_{n}\sum_{i<\eta^{-1}}P(\sup_{0\leqslant s_1\leqslant 1}\sup_{i\eta\leqslant t_2\leqslant(i+1)\eta}|\widetilde{Y}_n(s_1,t_2)-\widetilde{Y}_n(s_1,i\eta)|\geqslant\epsilon)=0.$$

我们先证明下式

$$P\{\sup_{0\leqslant s_1\leqslant 1}|\widetilde{Y}_n(s_1,t_2)-\widetilde{Y}_n(s_1,t_1)|\geqslant\epsilon\}\leqslant\frac{C}{\epsilon^{2+\delta}}|u(t_2)-u(t_1)|^{1+\delta/2}.\qquad(1.4.14)$$

由于

$$\max_{1\leqslant i\leqslant[m/\eta]}|\widetilde{Y}_n(\frac{i}{m}\eta,t_2)-\widetilde{Y}_n(\frac{i}{m}\eta,t_1)|=\max_{1\leqslant i\leqslant[m/\eta]}|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{[n\frac{i}{m}\eta]}(\widetilde{X}_k(t_2)-\widetilde{X}_k(t_1))|,$$

由引理 1.4.2 及条件 (iv), 有

$$P\{\max_{1\leqslant i\leqslant[m/\eta]}|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{[n\frac{i}{m}\eta]}(\widetilde{X}_k(t_2)-\widetilde{X}_k(t_1))|\geqslant\epsilon\}$$

$$\leqslant\quad\frac{n^{-(1+\delta/2)}}{\epsilon^{2+\delta}}E\max_{1\leqslant i\leqslant[m/\eta]}|\sum_{k=1}^{[n\frac{i}{m}\eta]}(\widetilde{X}_k(t_2)-\widetilde{X}_k(t_1))|^{2+\delta}$$

$$\leqslant\quad B_{2+\delta}C\frac{n^{-(1+\delta/2)}}{\epsilon^{2+\delta}}n^{1+\delta/2}|u(t_2)-u(t_1)|^{1+\delta/2}.$$

令 $m\to\infty$, 有

$$P\{\sup_{0\leqslant s_1\leqslant 1}|\widetilde{Y}_n(s_1,t_2)-\widetilde{Y}_n(s_1,t_1)|\geqslant\epsilon\}\leqslant\frac{C}{\epsilon^{2+\delta}}|u(t_2)-u(t_1)|^{1+\delta/2},$$

这就证明了 (1.4.14) 式. 由引理 1.4.3 及 (1.4.14) 式, 可得

$$P\{\sup_{0\leqslant s_1\leqslant 1}\max_{1\leqslant j\leqslant m}|\widetilde{Y}_n(s_1,\frac{j}{m}\eta+i\eta)-\widetilde{Y}_n(s_1,i\eta)|\geqslant\epsilon\}\leqslant\frac{C}{\epsilon^{2+\delta}}|u((i+1)\eta)-u(i\eta)|^{1+\delta/2}.$$

令 $m\to\infty$, 有

$$P\{\sup_{0\leqslant s_1\leqslant 1}\sup_{i\eta\leqslant t_2\leqslant(i+1)\eta}|\widetilde{Y}_n(s_1,t_2)-\widetilde{Y}_n(s_1,i\eta)|\geqslant\epsilon\}\leqslant\frac{C}{\epsilon^{2+\delta}}|u((i+1)\eta)-u(i\eta)|^{1+\delta/2}.$$

因此,

$$\sum_{i<\eta^{-1}}P\{\sup_{0\leqslant s_1\leqslant 1}\sup_{i\eta\leqslant t_2\leqslant(i+1)\eta}|\widetilde{Y}_n(s_1,s_2)-\widetilde{Y}_n(s_1,i\eta)|\geqslant\epsilon\}$$

$$\leqslant\quad\frac{C}{\epsilon^{2+\delta}}|u(1)|[\max_{i<\eta^{-1}}|u((i+1)\eta)-u(i\eta)|]^{\delta/2}.$$

由于 $u(t)$ 为不减连续函数, 只要当 $\eta\to 0$ 时上式趋向于零, 因此我们证明了 (1.4.12) 式.

§1.4.4　定理 1.4.3 的证明

定理 1.4.3 的证明 先证

$$\frac{1}{\sqrt{N_n}}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\max_{1\leqslant k\leqslant N_n}|\widetilde{S}_k(t)-S_k(t)|\xrightarrow{P}0. \tag{1.4.15}$$

取 $K>1$ 充分大，使

$$P(\frac{2}{K}<\theta<K)\geqslant 1-\frac{\delta}{3}.$$

由引理 1.4.1, 并注意到 a_n 为实数列且 $a_n\to\infty$, 知

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{K}a_n}}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\max_{1\leqslant k\leqslant 2Ka_n}|\widetilde{S}_k(t)-S_k(t)|\xrightarrow{P}0. \tag{1.4.16}$$

又

$$\begin{aligned}
&P(\frac{1}{\sqrt{N_n}}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\max_{0\leqslant k\leqslant N_n}|\widetilde{S}_k(t)-S_k(t)|\geqslant\epsilon)\\
\leqslant\ & P(\frac{1}{\sqrt{N_n}}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\max_{0\leqslant k\leqslant N_n}|\widetilde{S}_k(t)-S_k(t)|\geqslant\epsilon,|\frac{N_n}{a_n}-\theta|\leqslant\frac{1}{K},\frac{2}{K}<\theta<K)\\
&+P(|\frac{N_n}{a_n}-\theta|>\frac{1}{K})+\frac{\delta}{3}\\
\leqslant\ & P(\frac{1}{\sqrt{\frac{a_n}{K}}}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\max_{0\leqslant k\leqslant 2Ka_n}|\widetilde{S}_k(t)-S_k(t)|\geqslant\epsilon)+P(|\frac{N_n}{a_n}-\theta|>\frac{1}{K})+\frac{\delta}{3}.
\end{aligned}$$

因此，由 (1.4.16) 式及 $\frac{N_n}{a_n}\xrightarrow{P}\theta$ 知 (1.4.15) 式成立.

由 (1.4.15) 式知，我们只要证

$$\widetilde{Y}_{N_n}(s,t)=\frac{1}{\sqrt{N_n}}\widetilde{S}_{[N_ns]}(t)\Rightarrow G. \tag{1.4.17}$$

令 $Y'_n(s,t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{p_n\leqslant k\leqslant ns}\widetilde{X}_k(t)$, 其中 $p_n/\sqrt{n}\to 0$, 与 Billingsley(1968) 的定理 17.2 类似，为了证明 (1.4.17) 式，我们只要证

$$\sup_{s,t}|Y'_n(s,t)-\widetilde{Y}_n(s,t)|\xrightarrow{P}0, \tag{1.4.18}$$

及

$$P(\{Y'_n\in A\}\cap E)-P(Y'_n\in A)P(E)\to 0 \tag{1.4.19}$$

对 $\forall$ $D_{[0,1]\times[0,1]}$ 中的 Borel 集和 $E\in\sigma(\widetilde{X}_1,\cdots,\widetilde{X}_k)$, $k\geqslant 1$, 成立. 由 ρ- 混合性, 对当 $p_n>k$ 时

$$|P(\{Y_n'\in A\}\cap E)-P(Y_n'\in A)P(E)|\leqslant\rho(p_n-k)\to 0\ \ (n\to\infty).$$

(1.4.19) 得证. 另一方面,

$$\begin{aligned} E\sup_{s,t}|Y_n'(s,t)-\widetilde{Y}_n(s,t)| &\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{p_n}E\sup_t|\widetilde{X}_k(t)| \\ &\leqslant C\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{p_n}E\sup_t|\varepsilon_k(t)|\leqslant C\frac{p_n}{\sqrt{n}}\to 0. \end{aligned}$$

(1.4.18) 得证. 定理 1.4.3 证毕.

第二章　由相依序列产生的线性过程的精确渐近性质

第一节　引　言

众所周知，现实生活中发生的事情大多并不是互不相干的，而是彼此之间具有某种联系的．正确地用数学方法描述这种相关性，就可以用数学 — 这一精确的工具来对事物进行精确地研究．下面我们先来介绍一下 φ- 混合和负相伴的概念．

$\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 被称为 $\varphi-$ 混合随机变量序列，如果当 $m \to \infty$ 时，

$$\varphi(m) = \sup_k \varphi(\mathcal{F}_{-\infty}^k, \mathcal{F}_{k+m}^\infty) \to 0,$$

其中 $\mathcal{F}_n^m = \sigma(\varepsilon_k, n \leqslant k \leqslant m)$ 以及 $\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup\limits_{\substack{A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B}\\ P(A)>0}} |P(B|A) - P(B)|$.

一有限的实值随机变量族 $\{\varepsilon_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 被称为是负相伴 (NA) 的，如果

对于 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任何两个不相交的非空子集 A 和 B, 有

$$\mathrm{Cov}\{f(\varepsilon_i;i\in A),g(\varepsilon_j;j\in B)\}\leqslant 0$$

其中 f 和 g 是任何使得协方差存在且对每个变元都非降的函数. 称一无穷的实值随机变量族 $\{\varepsilon_t;t\in T\}$ 是 NA 族, 如果它的任何有限子族都是 NA 的.

本章主要考虑的是由 φ- 混合或 NA 两种相依随机变量序列产生的线性过程的一些精确渐近结果.

假设 $\{\varepsilon_i;-\infty<i<\infty\}$ 为同分布 φ- 混合或负相伴的双侧无穷随机变量序列, 均值为零, 方差有限. 令 $\{a_i;-\infty<i<\infty\}$ 为一绝对可和的实数序列以及

$$X_k=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{i+k}\varepsilon_i,\qquad k\geqslant 1. \tag{2.1.1}$$

在一些适当的条件下, 对于线性过程 $\{X_k;k\geqslant 1\}$ 已经得到了很多极限结果. 比如, Burton 和 Dehling (1990) 得到了 $\{X_k;k\geqslant 1\}$ 的大偏差原理, Yang (1996) 建立了中心极限定理以及重对数律, Li *et al.* (1992a) 和 Zhang (1996) 都得到了完全收敛性方面的结果.

完全收敛性的概念是由 Hsu 和 Robbins (1947) 引入的, Erdös (1949, 1950) 和 Spitzer (1956) 也作了相应的研究. 到了 20 世纪 60 年代, Katz (1963) 及 Baum 和 Katz (1965) 推广了他们的结果, 得到如下结论: 设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 为 i.i.d. 随机变量列, 记 $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$. 令 $p<2$, $r\geqslant p$. 那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r/p-2}\mathsf{P}\{|S_n|>\varepsilon n^{1/p}\}<\infty,\quad \varepsilon>0$$

成立的充要条件为 $\mathsf{E}|X_1|^r<\infty$, 且当 $r\geqslant 1$ 时 $\mathsf{E}X=0$. 其后 Davis (1968) 证明了: 对任意 $\varepsilon>0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}\mathsf{P}\{|T_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{n\log n}\}<\infty.$$

成立的充要条件为 $\mathsf{E}X_1 = 0$ 且 $\mathsf{E}X^2 < \infty$. 随后，又产生了各种各样的上述结果的推广形式，我们就不一一介绍了. 下面的定理是 Zhang (1996) 得到的关于线性过程 (2.1.1) 的完全收敛性的结果.

定理 2.A *假设 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为同分布的 φ- 混合随机变量序列，满足 $\sum_{m=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(m) < \infty$ 且 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 定义如 (2.1.1). 令 $h(x) > 0 (x > 0)$ 为缓变函数以及 $1 \leqslant p < 2, r \geqslant p$. 那么当 $E\varepsilon_1 = 0$ 及 $E|\varepsilon_1|^r h(|\varepsilon_1|^p) < \infty$ 时，对任意 $\epsilon > 0$, 我们有*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} h(n) P\Big\{\Big|\sum_{k=1}^{n} X_k\Big| \geqslant \epsilon n^{1/p}\Big\} < \infty.$$

当 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 为服从分布 F 的独立同分布的随机变量序列，均值为零，方差为正且有限，则以上这种类型的完全收敛性称为 Baum-Katz 大数律. Chen (1978) 及 Gut 和 Spătaru (2000a) 讨论了当 $\epsilon \searrow 0$ 时 Baum-Katz 及 Davis 大数律的精确渐近性. 下面是他们得到的其中一个结果.

定理 2.B *假设 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 为 $i.i.d$ 随机变量序列满足 $EX_1 = 0$ 以及 $0 < EX_1^2 = \gamma^2 < \infty$. 那么，对于 $1 \leqslant p < r$,*

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} P\Big\{\Big|\sum_{k=1}^{n} X_k\Big| \geqslant \epsilon n^{1/p}\Big\} = \frac{p}{r-p} E|Z|^{2(r-p)/(2-p)},$$

其中 Z 服从期望为 0, 方差为 γ^2 的正态分布.

本章第二节的主要目的就是为了在 φ- 混合或 NA 两种相依条件下证明对于形式为 (2.1.1) 的线性过程定理 2.B 类型的完全收敛性的精确渐近结果也同样成立.

另一方面，线性过程重对数律的精确渐近性方面的结果也非常之少. 本章第三节中，我们将证明形式为 (2.1.1) 的线性过程在 φ- 混合或 NA 两种相依条件

下关于下列重对数律的精确渐近性结果也同样成立. Gut 和 Spătaru (2000b) 证明了当 $\{X, X_k; k \geqslant 1\}$ 为 i.i.d 随机变量时重对数律的精确渐近性, 结果如下. 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, n \geqslant 1$.

定理 2.C 假设 $EX = 0$ 及 $EX^2 = \sigma^2 < \infty$. 那么

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n} P(|S_n| \geqslant \epsilon \sqrt{n \log \log n}) = \sigma^2.$$

将 $\sqrt{n \log \log n}$ 替换成 $\sqrt{n \log n}$, Gut 和 Spătaru (2000a) 给出了以下对数律的精确渐近结果.

定理 2.D 假设 $EX = 0$ 及 $EX^2 = \sigma^2 < \infty$. 那么对于任意的 $\delta \geqslant 0$,

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon^{2\delta+2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^{\delta}}{n} P\{|S_n| \geqslant \epsilon \sqrt{n \log n}\} = \frac{\mu^{(2\delta+2)}}{\delta+1} \sigma^{2\delta+2},$$

其中 $\mu^{(2\delta+2)}$ 代表标准正态分布的 $(2\delta+2)$- 阶绝对矩.

矩完全收敛性问题是由 Chow (1988) 提出的, 并讨论了 i.i.d. 随机变量序列的矩完全收敛性.

定理 2.E 假设 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 为 *i.i.d.* 的随机变量序列满足 $EX_1 = 0$. 对 $1 \leqslant p < 2$ 及 $r > p$, 若 $E\{|X_1|^r + |X_1| \log(1 + |X_1|)\} < \infty$, 那么对任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} E\Big\{\Big|\sum_{k=1}^{n} X_k\Big| - \epsilon n^{1/p}\Big\}_+ < \infty.$$

王定成和苏淳 (2002) 讨论了 B 值独立同分布随机变元序列的矩完全收敛性. 在本章第三节中我们讨论了由 NA 随机变量序列产生的线性过程 (2.1.1) 关于矩的完全收敛性.

第二节 由相依序列产生的线性过程的精确完全收敛性

§2.2.1 介绍和主要结果

假设 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为同分布的 φ- 混合随机变量序列，均值为零方差有限，且假设 $0 < \sigma^2 = E\varepsilon_1^2 + 2\sum\limits_{k=2}^{\infty} E\varepsilon_1\varepsilon_k < \infty$. 记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k, n \geqslant 1$, $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 定义如 (2.1.1). 以下为本节的主要结果.

定理 2.2.1 *假设 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 定义如 (2.1.1), 其中 $\{a_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一实数序列满足 $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty$ 以及 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一同分布的 φ- 混合随机变量序列满足 $E\varepsilon_i = 0, E\varepsilon_i^2 < \infty$ 以及 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(m) < \infty$. 对 $1 \leqslant p < 2$ 及 $r > p$, 若 $E|\varepsilon_1|^r < \infty$, 那么有*

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} P\{|S_n| \geqslant \epsilon n^{1/p}\} = \frac{p}{r-p} E|Z|^{2(r-p)/(2-p)}, \qquad (2.2.1)$$

其中 Z 服从期望为 0, 方差为 $\tau^2 = \sigma^2 \cdot (\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_i)^2$ 的正态分布.

定理 2.2.2 *假设 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 定义如 (2.1.1), 其中 $\{a_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一实数序列满足 $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty$ 以及 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一同分布的 φ- 混*

合随机变量序列满足 $E\varepsilon_i=0, E\varepsilon_i^2<\infty$ 及 $\sum_{m=1}^{\infty}\varphi^{1/2}(m)<\infty$. 对 $1\leqslant p<2$, 有

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{1}{-\log\epsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P\{|S_n|\geqslant \epsilon n^{1/p}\}=\frac{2p}{2-p}. \tag{2.2.2}$$

当 $\{\varepsilon_i;-\infty<i<\infty\}$ 为同分布的 NA 随机变量序列满足均值为零方差有限且 $0<\sigma^2=E\varepsilon_1^2+2\sum_{k=2}^{\infty}E\varepsilon_1\varepsilon_k<\infty$ 时，以上结果同样成立.

定理 2.2.3 假设 $\{X_k;k\geqslant 1\}$ 如定义 *(2.1.1)*, 其中 $\{a_i;-\infty<i<\infty\}$ 为一实数序列满足 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_i|<\infty$ 以及 $\{\varepsilon_i;-\infty<i<\infty\}$ 为一同分布 *NA* 随机变量序列满足 $E\varepsilon_i=0$ 及 $E\varepsilon_i^2<\infty$. 对 $1\leqslant p<2$ 及 $r>p$, 若 $E|\varepsilon_1|^r<\infty$, 那么 *(2.2.1)* 成立.

定理 2.2.4 假设 $\{X_k;k\geqslant 1\}$ 如定义 *(2.1.1)*, 其中 $\{a_i;-\infty<i<\infty\}$ 为一实数序列满足 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_i|<\infty$ 以及 $\{\varepsilon_i;-\infty<i<\infty\}$ 为一同分布的 *NA* 随机变量序列满足 $E\varepsilon_i=0$ 及 $E\varepsilon_i^2<\infty$. 对 $1\leqslant p<2$, 那么 *(2.2.2)* 成立.

注 2.2.1 令 $a_{i+k}=1, i=k; a_{i+k}=0, i\neq k, 1\leqslant k\leqslant n$, 那么 $X_k=\varepsilon_k$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k$. 可见当 $\{X_k;k\geqslant 1\}$ 为一同分布的 φ- 混合或 *NA* 随机变量序列, 在某些适当的条件下 *(2.2.1)* 和 *(2.2.2)* 同样成立. 因此这些结果推广了 *Chen (1978)* 以及 *Gut* 和 *Spătaru (2000a,b)* 上的结果.

§2.2.2 引理

下面的引理来自于 Burton 和 Dehling (1990).

引理 2.2.1 令 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i$ 为一绝对收敛的实数序列满足 $a = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i$ 及 $k \geqslant 1$. 那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Big| \sum_{j=i+1}^{i+n} a_j \Big|^k = a^k.$$

以下这个引理非常有用. 证明参见 Shao (1998) (也可参见 Shao, 1993).

引理 2.2.2 令 $\{\varepsilon_i; i \geqslant 1\}$ 为一 φ- 混合序列. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k, n \geqslant 1$. 假设存在一正常数序列 $\{C_n\}$ 使得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} ES_i^2 \leqslant C_n.$$

那么对任意的 $q \geqslant 2$, 存在 $C = C(q, \varphi(\cdot))$ 满足

$$E \max_{1\leqslant i\leqslant n} |S_i|^q \leqslant C(C_n^{q/2} + E \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\varepsilon_i|^q). \tag{2.2.3}$$

同样的, 我们有类似的对于 NA 序列的引理.

引理 2.2.3 令 $\{\varepsilon_i; i \geqslant 1\}$ 为一 NA 序列. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k, n \geqslant 1$. 那么对任意的 $q \geqslant 2$, 存在 $C = C(q)$ 满足

$$E \max_{1\leqslant i\leqslant n} |S_i|^q \leqslant C\big((\sum_{1\leqslant i\leqslant n} E\varepsilon_i^2)^{q/2} + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} E|\varepsilon_i|^q\big). \tag{2.2.4}$$

令 N 为标准正态变量. 下面的引理是关于线性过程的中心极限定理 (CLT).

引理 2.2.4 假设 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为均值为零方差有限的平稳随机变量序列, 并且假设 $0 < \sigma^2 = E\varepsilon_1^2 + 2\sum_{k=2}^{\infty} E\varepsilon_1\varepsilon_k < \infty$. 那么如果满足下面两个条件中的其中之一:

(i) $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一 φ- 混合随机变量序列满足 $\sum_{m=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(2^m) < \infty$.

(ii) $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一 NA 随机变量序列.

$\{X_k; k \geqslant 1\}$ 定义如 (2.1.1). 那么线性过程 $\{X_k\}$ 服从 CLT, 即,

$$\frac{S_n}{\tau\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1), \quad \text{其中} \quad \tau = \sigma \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i.$$

证明 此引理证明与 Kim (2001) 的定理 1 证明相似. 因此我们就此省略.

不失一般性, 下文中我们假设 $\tau = 1$. 且只证明 φ- 混合随机变量的情况.

§2.2.3 定理 2.2.1 的证明

令 $a(\epsilon) := \epsilon^{-2p/(2-p)}$. 定理 2.2.1 可由以下四个命题得证.

命题 2.2.1 对 $1 \leqslant p < 2$ 及 $r > p$, 我们有

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} P\{|N| \geqslant \epsilon n^{1/p-1/2}\} = \frac{p}{r-p} E|N|^{2(r-p)/(2-p)}, \quad (2.2.5)$$

其中 N 为标准正态随机变量.

证明 此证明, 除了一些小细节外, 基本与 Gut 和 Spătaru (2000a) 的命题 3.1 相似.

命题 2.2.2 对 $1 \leqslant p < 2$, $r > p$ 以及所有的 $M > 2$, 我们有

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)} \sum_{n \leqslant a(\epsilon) M} n^{r/p-2} \sup_x \left| P\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\} - P\{|N| \geqslant x\} \right| = 0. \quad (2.2.6)$$

证明 令 $\Delta_n = \sup_x \left|P\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\} - P\{|N| \geqslant x\}\right|$. 那么由引理 2.2.4, 当 $n \to \infty$ 时 $\Delta_n \to 0$. 立即得到

$$\lim_{m\to\infty} m^{-r/p+1} \sum_{n=1}^{m} n^{r/p-2} \Delta_n = 0.$$

因此，我们有当 $\epsilon \searrow 0$ 时,

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{2(r-p)/(2-p)} \sum_{n\leqslant a(\epsilon)M} n^{r/p-2}\Delta_n \\
= \;& \epsilon^{2(r-p)/(2-p)}[a(\epsilon)M]^{r/p-1}[a(\epsilon)M]^{-r/p+1} \sum_{n\leqslant[a(\epsilon)M]} n^{r/p-2}\Delta_n \\
\leqslant \;& M^{r/p-1}[a(\epsilon)M]^{-r/p+1} \sum_{n\leqslant[a(\epsilon)M]} n^{r/p-2}\Delta_n \to 0.
\end{aligned}$$

命题 2.2.3 对 $1 \leqslant p < 2$, $r > p$, 以及所有充分小的 $0 < \epsilon < 1$, 一致成立

$$\lim_{M\to\infty} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)} \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2} P\{|N| \geqslant \epsilon n^{1/p-1/2}\} = 0. \tag{2.2.7}$$

证明 注意到对 $M > 2$ 及 $0 < \epsilon < 1$, 有 $a(\epsilon)M - 1 \geqslant a(\epsilon)M/2$. 立即可得当 $M \to \infty$ 时, 对 $1 \leqslant p < 2$, $r > p$ 以及 $0 < \epsilon < 1$ 一致成立,

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{2(r-p)/(2-p)} \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2} P\{|N| \geqslant \epsilon n^{1/p-1/2}\} \\
\leqslant \;& \epsilon^{2(r-p)/(2-p)} \int_{a(\epsilon)M-1}^{\infty} x^{r/p-2} P\{|N| \geqslant \epsilon x^{1/p-1/2}\} \mathrm{d}x \\
\leqslant \;& \epsilon^{2(r-p)/(2-p)} \int_{a(\epsilon)M/2}^{\infty} x^{r/p-2} P\{|N| \geqslant \epsilon x^{1/p-1/2}\} \mathrm{d}x \\
= \;& \frac{2p}{2-p} \int_{(M/2)^{(2-p)/2p}}^{\infty} y^{2(r-p)/(2-p)-1} P\{|N| \geqslant y\} \mathrm{d}y \\
& \to 0.
\end{aligned}$$

命题 2.2.4 假设 $E|\varepsilon_1|^r<\infty$. 对 $1\leqslant p<2$ 及 $r>p$, 我们有

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(r-p)/(2-p)}\sum_{n>a(\epsilon)M}n^{r/p-2}P\{|S_n|\geqslant \epsilon n^{1/p}\}=0. \tag{2.2.8}$$

证明 注意到

$$\sum_{k=1}^{n}X_k=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{k+i}\varepsilon_i,$$

记 $a_{ni}=\sum_{k=1}^{n}a_{k+i}$. 那么

$$\sum_{k=1}^{n}X_k=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ni}\varepsilon_i.$$

由引理 2.2.1, 不失一般性, 我们假设

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_{ni}|\leqslant n,\quad n\geqslant 1\quad \text{及}\quad \tilde a=:\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_i|\leqslant 1. \tag{2.2.9}$$

令 $S_n'=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ni}\varepsilon_iI\{|a_{ni}\varepsilon_i|\leqslant \epsilon n^{1/p}\}$. 那么对 $n\geqslant a(\epsilon)M$,

$$\begin{aligned}
n^{-1/p}|ES_n'| &= n^{-1/p}\Big|\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ni}E\varepsilon_iI\{|a_{ni}\varepsilon_i|>\epsilon n^{1/p}\}\Big|\\
&\leqslant n^{-1/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_{ni}|E|\varepsilon_1|I\{|a_{ni}\varepsilon_1|>\epsilon n^{1/p}\}\\
&\leqslant n^{-1/p}nE|\varepsilon_1|I\{\tilde a|\varepsilon_1|>\epsilon n^{1/p}\}\\
&\leqslant n^{-1/p}nE|\varepsilon_1|I\{|\varepsilon_1|>\epsilon n^{1/p}\}\\
&\leqslant n^{1-1/p}(E|\varepsilon_1|^2)^{1/2}(P(|\varepsilon_1|>\epsilon n^{1/p}))^{1/2}\\
&\leqslant n^{1-1/p}\frac{E|\varepsilon_1|^2}{\epsilon n^{1/p}}=\frac{E|\varepsilon_1|^2}{\epsilon n^{2/p-1}}\\
&\leqslant \frac{E|\varepsilon_1|^2}{\epsilon(a(\epsilon)M)^{2/p-1}}=\frac{\epsilon E|\varepsilon_1|^2}{M^{2/p-1}}.
\end{aligned}$$

因此，对足够大的 M 以及所有的 $n \geqslant a(\epsilon)M$, 我们有 $n^{-1/p}|ES_n'| < \epsilon/2$. 那么

$$P\{|S_n| \geqslant \epsilon n^{1/p}\} \leqslant P\{\sup_i |a_{ni}\varepsilon_i| > \epsilon n^{1/p}\} + P\{|S_n' - ES_n'| \geqslant \epsilon n^{1/p}/2\}$$

$$:= I_1 + I_2.$$

记 $I_{nj} = \{i \in \mathcal{L}; (j+1)^{-1/p} < |a_{ni}| \leqslant j^{-1/p}\}, j = 1, 2, \cdots$ 那么 $\bigcup_{j\geqslant 1} I_{nj} = \mathcal{L}$. 注意到 (参见 Li 等 (1992a))

$$\sum_{j=1}^{k} \sharp I_{nj} \leqslant n(k+1)^{1/p}. \tag{2.2.10}$$

对于 I_1 及 $1 \leqslant p < r < 2$, 注意到 $E|\varepsilon_1|^2 < \infty$, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{n > a(\epsilon)M} n^{r/p-2} I_1 \\
\leqslant\ & \sum_{n > a(\epsilon)M} n^{r/p-2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} P\{|a_{ni}\varepsilon_i| > \epsilon n^{1/p}\} \\
\leqslant\ & \sum_{n > a(\epsilon)M} n^{r/p-2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in I_{nj}} P\{|\varepsilon_1| \geqslant \epsilon j^{1/p} n^{1/p}\} \\
\leqslant\ & \sum_{n > a(\epsilon)M} n^{r/p-2} \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj}) \sum_{k \geqslant jn} P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\} \\
\leqslant\ & \sum_{n > a(\epsilon)M} n^{r/p-2} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=1}^{[k/n]} (\sharp I_{nj}) P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\} \\
\leqslant\ & \sum_{n > a(\epsilon)M} n^{r/p-2} \sum_{k=n}^{\infty} n(\frac{k}{n}+1)^{1/p} P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\} \\
\leqslant\ & C \sum_{n > a(\epsilon)M} n^{r/p-1} n^{-1/p} \sum_{k=n}^{\infty} k^{1/p} P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-1-1/p}\epsilon^{-1}E|\varepsilon_1|I\{\epsilon^{-1}|\varepsilon_1|\geqslant n^{1/p}\}\\
&\leqslant C\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-1-1/p}\epsilon^{-1}(E|\varepsilon_1|^2)^{1/2}(P\{\epsilon^{-1}|\varepsilon_1|\geqslant n^{1/p}\})^{1/2}\\
&\leqslant C\epsilon^{-2}E|\varepsilon_1|^2\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-1-2/p}\leqslant C\epsilon^{-2}(a(\epsilon)M)^{r/p-2/p}\\
&= C\epsilon^{2(p-r)/(2-p)}M^{(r-2)/p}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(r-p)/(2-p)}\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2}I_1 &\leqslant C\lim_{M\to\infty}M^{(r-2)/p}\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

对 $r\geqslant 2$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2}I_1\\
\leqslant&\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}P\{|a_{ni}\varepsilon_i|>\epsilon n^{1/p}\}\\
\leqslant&\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i\in I_{nj}}P\{|\varepsilon_1|\geqslant\epsilon j^{1/p}n^{1/p}\}\\
\leqslant&\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})\sum_{k\geqslant jn}P\{k\leqslant\epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}\\
\leqslant&\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2}\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=1}^{[k/n]}(\sharp I_{nj})P\{k\leqslant\epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}\\
\leqslant&\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2}\sum_{k=n}^{\infty}n(\frac{k}{n}+1)^{1/p}P\{k\leqslant\epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-1} n^{-1/p} \sum_{k=n}^{\infty} k^{1/p} P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\} \\
&\leqslant C \sum_{k>a(\epsilon)M} \sum_{a(\epsilon)M<n\leqslant k} n^{r/p-1-1/p} k^{1/p} P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\} \\
&\leqslant C \sum_{k>a(\epsilon)M} k^{r/p-1/p} k^{1/p} P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\} \\
&= C \sum_{k>a(\epsilon)M} k^{r/p} P\{k^{r/p} \leqslant \epsilon^{-r}|\varepsilon_1|^r < (k+1)^{r/p}\} \\
&\leqslant C\epsilon^{-r} E|\varepsilon_1|^r I\{\epsilon^{-r}|\varepsilon_1|^r \geqslant (a(\epsilon)M)^{r/p}\} \\
&= C\epsilon^{-r} E|\varepsilon_1|^r I\{|\varepsilon_1| \geqslant \epsilon^{-p/(2-p)} M^{1/p}\}.
\end{aligned}
$$

由 $E|\varepsilon_1|^r < \infty$, 立即可得，对 $r > 2$

$$
\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)} \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2} I_1 \leqslant C \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{p(r-2)/(2-p)} = 0
$$

以及对 $r = 2$,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)} \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2} I_1 \\
\leqslant\ &\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} E|\varepsilon_1|^r I\{|\varepsilon_1| \geqslant \epsilon^{-p/(2-p)} M^{1/p}\} = 0.
\end{aligned}
$$

那么，对 $1 \leqslant p < r$ 及 $r > p$, 我们有

$$
\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)} \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2} I_1 = 0. \tag{2.2.11}
$$

现在开始估计 I_2, 注意到 $\sum_{m=1}^{\infty}\varphi^{1/2}(m)<\infty$, 则有

$$\sup_{-\infty\leqslant l\leqslant m\leqslant\infty}E\Big(\sum_{i=l}^{m}a_{ni}\varepsilon_i I\{|a_{ni}\varepsilon_i|\leqslant\epsilon n^{1/p}\}-E\sum_{i=l}^{m}a_{ni}\varepsilon_i I\{|a_{ni}\varepsilon_i|\leqslant\epsilon n^{1/p}\}\Big)^2$$

$$\leqslant\ C\sum_{i=-\infty}^{\infty}E(a_{ni}\varepsilon_i)^2 I\{|a_{ni}\varepsilon_i|\leqslant\epsilon n^{1/p}\}=C\sum_{i=-\infty}^{\infty}E(a_{ni}\varepsilon_1)^2 I\{|a_{ni}\varepsilon_1|\leqslant\epsilon n^{1/p}\}.\tag{2.2.12}$$

那么由引理 2.2.2, 对 $q\geqslant 2$, 我们有

$$\begin{aligned}
&I_2=P\{|S_n'-ES_n'|\geqslant\epsilon n^{1/p}/2\}\leqslant C\epsilon^{-q}n^{-q/p}E|S_n'-ES_n'|^q\\
\leqslant\ &C\epsilon^{-q}n^{-q/p}\Big\{\Big(\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ni}^2E\varepsilon_i^2 I\{|a_{ni}\varepsilon_i|\leqslant\epsilon n^{1/p}\}\Big)^{q/2}\\
&+E\max_i|a_{ni}\varepsilon_i|^q I\{|a_{ni}\varepsilon_i|\leqslant\epsilon n^{1/p}\}\Big\}\\
\leqslant\ &C\epsilon^{-q}n^{-q/p}\Big(\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ni}^2E\varepsilon_1^2 I\{|a_{ni}\varepsilon_1|\leqslant\epsilon n^{1/p}\}\Big)^{q/2}\\
&+C\epsilon^{-q}n^{-q/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty}E|a_{ni}\varepsilon_1|^q I\{|a_{ni}\varepsilon_1|\leqslant\epsilon n^{1/p}\}=:I_3+I_4.
\end{aligned}$$

对于 I_3, 选取足够大的 q 满足 $q(1/p-1/2)>r/p-1$, 那么

$$\begin{aligned}
\sum_{n>a(\epsilon)M}n^{r/p-2}I_3\ &\leqslant\ C\sum_{n>a(\epsilon)M}n^{r/p-2}\epsilon^{-q}n^{-q/p}\Big(\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ni}^2E\varepsilon_1^2\Big)^{q/2}\\
&\leqslant\ C\sum_{n>a(\epsilon)M}\epsilon^{-q}n^{r/p-2-q(1/p-1/2)}\\
&\leqslant\ C\epsilon^{-q}(a(\epsilon)M)^{r/p-1-q(1/p-1/2)}\\
&=\ C\epsilon^{2(p-r)/(2-p)}M^{r/p-1-q(1/p-1/2)}.
\end{aligned}$$

马上有，对 $1 \leqslant p < 2$ 及 $r > p$

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)} \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2} I_3 \leqslant C \lim_{M\to\infty} M^{r/p-1-q(1/p-1/2)} = 0. \tag{2.2.13}$$

对于 I_4 及 $1 \leqslant p < r < 2$, 选取 $q = 2$, 那么

$$\begin{aligned}\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2} I_4 &\leqslant C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2} \epsilon^{-2} n^{-2/p} \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}^2 E\varepsilon_1^2 \\ &\leqslant C \sum_{n>a(\epsilon)M} \epsilon^{-2} n^{r/p-1-2/p} \\ &\leqslant C\epsilon^{-2}(a(\epsilon)M)^{r/p-2/p} \\ &= C\epsilon^{2(p-r)/(2-p)} M^{(r-2)/p}.\end{aligned}$$

因此我们得到，当 $1 \leqslant p < r < 2$ 时,

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)} \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2} I_4 \leqslant C \lim_{M\to\infty} M^{(r-2)/p} = 0. \tag{2.2.14}$$

对于 $r \geqslant 2$, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2} I_4 \\ \leqslant\ & C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2} \epsilon^{-q} n^{-q/p} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i\in I_{nj}} E|a_{ni}\varepsilon_1|^q I\{|a_{ni}\varepsilon_1| \leqslant \epsilon n^{1/p}\} \\ \leqslant\ & C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2} \epsilon^{-q} n^{-q/p} \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj}) j^{-q/p} E|\varepsilon_1|^q I\{|\varepsilon_1| \leqslant \epsilon (j+1)^{1/p} n^{1/p}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant C\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2}\epsilon^{-q}n^{-q/p}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q \\
&\quad \sum_{k=0}^{(j+1)n} I\{k\leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\} \\
&\leqslant C\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2}\epsilon^{-q}n^{-q/p}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q \\
&\quad \sum_{k=0}^{2n} I\{k\leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\} \\
&\quad +C\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2}\epsilon^{-q}n^{-q/p}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q \\
&\quad \sum_{k=2n+1}^{(j+1)n} I\{k\leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\} \\
&=: I_5+I_6.
\end{aligned}$$

注意到 $q\geqslant 1$ 及 $m\geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}
n &\geqslant \sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_{ni}|=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i\in I_{nj}}|a_{ni}|\geqslant \sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})(j+1)^{-1/p} \\
&\geqslant \sum_{j=m}^{\infty}(\sharp I_{nj})(j+1)^{-1/p}\geqslant \sum_{j=m}^{\infty}(\sharp I_{nj})(j+1)^{-q/p}(m+1)^{q/p-1/p}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{j=m}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}\leqslant Cnm^{-(q-1)/p}. \tag{2.2.15}$$

那么对于 I_5, 得到

$$I_5 \leqslant C\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2}\epsilon^{-q}n^{-q/p}n\sum_{k=0}^{2n}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}$$

$$\leqslant C\sum_{k>a(\epsilon)M}\sum_{n=[k/2]}^{\infty}\epsilon^{-q}n^{r/p-1-q/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant\epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}$$

$$\leqslant C\sum_{k>a(\epsilon)M}\epsilon^{-q}k^{r/p-q/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k^{r/p-q/p}\leqslant\epsilon^{-(r-q)}|\varepsilon_1|^{r-q}<(k+1)^{r/p-q/p}\}$$

$$\leqslant C\epsilon^{-q}\epsilon^{-(r-q)}E|\varepsilon_1|^r I\{\epsilon^{-p}E|\varepsilon|^p\geqslant a(\epsilon)M\}$$

$$= C\epsilon^{-r}E|\varepsilon_1|^r I\{|\varepsilon_1|\geqslant\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}\}.$$

由 $E|\varepsilon_1|^r<\infty$, 马上有，对 $r>2$

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(r-p)/(2-p)}I_5\leqslant C\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{p(r-2)/(2-p)}=0 \tag{2.2.16}$$

以及对 $r=2$

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(r-p)/(2-p)}I_5\leqslant\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}CE|\varepsilon_1|^r I\{|\varepsilon_1|\geqslant\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}\}=0. \tag{2.2.17}$$

对于 I_6, 则有

$$I_6 \leqslant C\sum_{n>a(\epsilon)M}n^{r/p-2}\epsilon^{-q}n^{-q/p}\sum_{k=2n+1}^{\infty}\sum_{j=k/n-1}^{\infty}j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q$$

$$I\{k\leqslant\epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}$$

$$\leqslant C\sum_{n>a(\epsilon)M}n^{r/p-2}\epsilon^{-q}n^{-q/p}\sum_{k=2n+1}^{\infty}n\Big(\frac{k}{n}\Big)^{-(q-1)/p}E|\varepsilon_1|^q$$

$$I\{k\leqslant\epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}$$

$$= C\sum_{n>a(\epsilon)M}n^{r/p-1-1/p}\epsilon^{-q}\sum_{k=2n+1}^{\infty}k^{-(q-1)/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant\epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}$$

$$\leqslant C \sum_{k>2a(\epsilon)M} \sum_{a(\epsilon)M<n\leqslant[k/2]} n^{r/p-1-1/p}\epsilon^{-q}k^{-(q-1)/p}E|\varepsilon_1|^q$$

$$I\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\}$$

$$\leqslant C \sum_{k>2a(\epsilon)M} k^{r/p-1/p}\epsilon^{-q}k^{-(q-1)/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\}$$

$$= C \sum_{k>2a(\epsilon)M} k^{r/p-q/p}\epsilon^{-q}E|\varepsilon_1|^q$$

$$I\{k^{r/p-q/p} \leqslant \epsilon^{-(r-q)}|\varepsilon_1|^{r-q} < (k+1)^{r/p-q/p}\}$$

$$\leqslant C\epsilon^{-q}\epsilon^{-(r-q)}E|\varepsilon_1|^r I\{\epsilon^{-p}E|\varepsilon|^p \geqslant 2a(\epsilon)M\}$$

$$= C\epsilon^{-r}E|\varepsilon_1|^r I\{|\varepsilon_1| \geqslant C\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}\}.$$

那么与证明 I_5 相似，对 $r > 2$, 得到

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)} I_6 \leqslant C \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{p(r-2)/(2-p)} = 0 \tag{2.2.18}$$

以及对 $r = 2$, 有

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)} \leqslant \lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} CE|\varepsilon_1|^r I\{|\varepsilon_1| \geqslant C\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}\}$$

$$= 0. \tag{2.2.19}$$

这样由 (2.2.14)–(2.2.19), 得到对 $1 \leqslant p < 2$ 及 $r > p$,

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)} \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2} I_4 = 0. \tag{2.2.20}$$

最后综合 (2.2.11), (2.2.13) 以及 (2.2.20), 此命题得证.

§2.2.4 定理 2.2.2 的证明

令 $b(\epsilon) := \epsilon^{-\beta p/(\beta - p)}$, 其中 $1 \leqslant p < \beta < \dfrac{4p}{2+p} < 2$. 定理 2.2.2 由下面四个命题立即可证.

命题 2.2.5 对 $1 \leqslant p < 2$,

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{-\log \epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\{|N| \geqslant \epsilon n^{1/p-1/2}\} = \frac{2p}{2-p}. \tag{2.2.21}$$

证明 参见 Gut 和 Spătaru (2000a) 的命题 4.1.

命题 2.2.6 对 $1 \leqslant p < 2$, 我们有

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{-\log \epsilon} \sum_{n \leqslant b(\epsilon)} \frac{1}{n} \sup_x \left| P\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\} - P\{|N| \geqslant x\} \right| = 0. \tag{2.2.22}$$

证明 记 $\Delta_n = \sup_x \left| P\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\} - P\{|N| \geqslant x\} \right|$. 那么当 $n \to \infty$ 时, 由引理 2.2.4 得到 $\Delta_n \to 0$. 这样就有

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{\log m} \sum_{n=1}^{m} \frac{\Delta_n}{n} = 0.$$

那么当 $\epsilon \searrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{-\log \epsilon} \sum_{n \leqslant b(\epsilon)} \frac{1}{n} \sup_x \left| P\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\} - P\{|N| \geqslant x\} \right| \\ = &\frac{1}{-\log \epsilon} \sum_{n \leqslant [b(\epsilon)]} \frac{\Delta_n}{n} = \frac{\log[b(\epsilon)]}{-\log \epsilon} \cdot \frac{1}{\log[b(\epsilon)]} \sum_{n \leqslant [b(\epsilon)]} \frac{\Delta_n}{n} \\ \leqslant &\frac{\beta p}{\beta - p} \cdot \frac{1}{\log[b(\epsilon)]} \sum_{n \leqslant [b(\epsilon)]} \frac{\Delta_n}{n} \to 0. \end{aligned}$$

命题 2.2.7 对 $1 \leqslant p < 2$, 我们有

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{-\log \epsilon} \sum_{n > b(\epsilon)} \frac{1}{n} P\{|N| \geqslant \epsilon n^{1/p-1/2}\} = 0. \tag{2.2.23}$$

证明 此证明除了一些小细节外，与 Gut 和 Spătaru (2000a) 命题 4.3 的证明基本相似.

命题 2.2.8 对 $1 \leqslant p < 2$, 我们有

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{-\log \epsilon} \sum_{n > b(\epsilon)} \frac{1}{n} P\{|S_n| \geqslant \epsilon n^{1/p}\} = 0. \tag{2.2.24}$$

证明 此证明与命题 2.2.4 相似. 记 $S_n' = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}\varepsilon_i I\{|a_{ni}\varepsilon_i| \leqslant \epsilon n^{1/p}\}$. 注意到 $1 \leqslant p < \beta < \dfrac{4p}{2+p} < 2$, 容易得到 $\dfrac{\beta(2-p)}{\beta - p} > 2$. 那么对 $n \geqslant b(\epsilon)$,

$$\begin{aligned}
n^{-1/p}|ES_n'| &= n^{-1/p}\Big|\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}E\varepsilon_i I\{|a_{ni}\varepsilon_i| > \epsilon n^{1/p}\}\Big| \\
&\leqslant n^{-1/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_{ni}|E|\varepsilon_1| I\{|a_{ni}\varepsilon_1| > \epsilon n^{1/p}\} \\
&\leqslant n^{-1/p} n E|\varepsilon_1| I\{\tilde{a}|\varepsilon_1| > \epsilon n^{1/p}\} \\
&\leqslant n^{-1/p} n E|\varepsilon_1| I\{|\varepsilon_1| > \epsilon n^{1/p}\} \\
&\leqslant n^{1-1/p}(E|\varepsilon_1|^2)^{1/2}(P(|\varepsilon_1| > \epsilon n^{1/p}))^{1/2} \\
&\leqslant n^{1-1/p}\frac{E|\varepsilon_1|^2}{\epsilon n^{1/p}} \\
&= \frac{E|\varepsilon_1|^2}{\epsilon n^{2/p-1}} \\
&\leqslant \frac{E|\varepsilon_1|^2}{\epsilon (b(\epsilon))^{2/p-1}} \\
&= \epsilon^{\frac{\beta(2-p)}{\beta-p}-1} E|\varepsilon_1|^2 < \epsilon/2.
\end{aligned}$$

因此，对 $n \geqslant b(\epsilon)$, 有 $n^{-1/p}|ES_n'| < \epsilon/2$. 则

$$
\begin{aligned}
P\{|S_n| \geqslant \epsilon n^{1/p}\} &\leqslant P\{\sup_i |a_{ni}\varepsilon_i| > \epsilon n^{1/p}\} + P\{|S_n' - ES_n'| \geqslant \epsilon n^{1/p}/2\} \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

对于 I_1, 由 (2.2.10), 有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n>b(\epsilon)} \frac{1}{n} I_1 &\leqslant \sum_{n>b(\epsilon)} \frac{1}{n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} P\{|a_{ni}\varepsilon_i| > \epsilon n^{1/p}\} \\
&\leqslant \sum_{n>b(\epsilon)} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i\in I_{nj}} P\{|\varepsilon_1| \geqslant \epsilon j^{1/p} n^{1/p}\} \\
&\leqslant \sum_{n>b(\epsilon)} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj}) \sum_{k\geqslant jn} P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\} \\
&\leqslant \sum_{n>b(\epsilon)} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=1}^{[k/n]} (\sharp I_{nj}) P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\} \\
&\leqslant \sum_{n>b(\epsilon)} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} n(\frac{k}{n}+1)^{1/p} P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\} \\
&\leqslant C \sum_{n>b(\epsilon)} n^{-1/p} \sum_{k=n}^{\infty} k^{1/p} P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\} \\
&\leqslant C \sum_{n>b(\epsilon)} n^{-1/p}\epsilon^{-1} E|\varepsilon_1| I\{\epsilon^{-1}|\varepsilon_1| \geqslant n^{1/p}\} \\
&\leqslant C \sum_{n>b(\epsilon)} n^{-1/p}\epsilon^{-1} (E|\varepsilon_1|^2)^{1/2} (P\{\epsilon^{-1}|\varepsilon_1| \geqslant n^{1/p}\})^{1/2} \\
&\leqslant C\epsilon^{-2} E|\varepsilon_1|^2 \sum_{n>b(\epsilon)} n^{-2/p} \\
&\leqslant C\epsilon^{-2} (b(\epsilon))^{1-2/p} \\
&= C\epsilon^{\frac{p(2-\beta)}{\beta-p}}.
\end{aligned}
$$

然后

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{1}{-\log\epsilon}\sum_{n>b(\epsilon)}\frac{1}{n}I_1\leqslant C\lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{1}{-\log\epsilon}\epsilon^{\frac{p(2-\beta)}{\beta-p}}=0. \tag{2.2.25}$$

与命题 2.2.4 相似，由引理 2.2.2, 对 $q\geqslant 2$, 有

$$\begin{aligned}
I_2&=P\{|S_n^{'}-ES_n^{'}|\geqslant \epsilon n^{1/p}/2\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}n^{-q/p}E|S_n^{'}-ES_n^{'}|^q\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}n^{-q/p}\Big\{\Big(\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ni}^2E\varepsilon_i^2I\{|a_{ni}\varepsilon_i|\leqslant\epsilon n^{1/p}\}\Big)^{q/2}\\
&\quad+E\max_i|a_{ni}\varepsilon_i|^qI\{|a_{ni}\varepsilon_i|\leqslant\epsilon n^{1/p}\}\Big\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}n^{-q/p}\Big(\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ni}^2E\varepsilon_1^2I\{|a_{ni}\varepsilon_1|\leqslant\epsilon n^{1/p}\}\Big)^{q/2}\\
&\quad+C\epsilon^{-q}n^{-q/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty}E|a_{ni}\varepsilon_1|^qI\{|a_{ni}\varepsilon_1|\leqslant\epsilon n^{1/p}\}\\
&=:I_3+I_4.
\end{aligned}$$

对于 I_3, 我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_{n>b(\epsilon)}\frac{1}{n}I_3&\leqslant C\sum_{n>b(\epsilon)}\frac{1}{n}\epsilon^{-q}n^{-q/p}\Big(\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ni}^2E\varepsilon_1^2\Big)^{q/2}\\
&\leqslant C\sum_{n>b(\epsilon)}\epsilon^{-q}n^{-1-q(1/p-1/2)}\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}(b(\epsilon))^{-q(1/p-1/2)}=C\epsilon^{\frac{pq(2-\beta)}{\beta-p}}.
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{1}{-\log\epsilon}\sum_{n>b(\epsilon)}\frac{1}{n}I_3\leqslant C\lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{1}{-\log\epsilon}\epsilon^{\frac{pq(2-\beta)}{\beta-p}}=0. \tag{2.2.26}$$

从上面的证明来看，选取 $q=2$, 这样 I_4 的证明就和 I_3 相似. 因此我们有

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{1}{-\log\epsilon}\sum_{n>b(\epsilon)}\frac{1}{n}I_4\leqslant C\lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{1}{-\log\epsilon}\epsilon^{\frac{2p(2-\beta)}{\beta-p}}=0. \tag{2.2.27}$$

综合 (2.2.25), (2.2.26) 以及 (2.2.27), 此命题得证.

§2.2.5 定理 2.2.3 和定理 2.2.4 的证明

证明 除了一些细节之外，和定理 2.2.1 以及定理 2.2.2 的证明类似. 比如，在证明过程中我们用引理 2.2.3 来代替引理 2.2.2.

第三节 由相依序列产生的线性过程重对数律的精确渐近性

§2.3.1 介绍和主要结果

假设 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一同分布的 φ- 混合随机变量序列，均值为零方差有限，且假设 $0 < \sigma^2 = E\varepsilon_1^2 + 2\sum_{k=2}^{\infty} E\varepsilon_1\varepsilon_k < \infty$. 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, n \geqslant 1$, $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 定义如 (2.1.1). 以下为本节的主要结果.

定理 2.3.1 *假设 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 定义如 (2.1.1), 其中 $\{a_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一实数序列满足 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty$ 以及 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一同分布的 φ- 混合随机变量序列满足 $E\varepsilon_i = 0, E\varepsilon_i^2 < \infty$ 及 $\sum_{m=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(m) < \infty$. 令 $a_n = O(1/\log\log n)$. 那么对于任意的 $\delta \geqslant 0$, 若 $E\left[\varepsilon_1^2(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\right] < \infty$, 我们有*

$$\lim_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2\delta+2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} P\{|S_n| \geqslant (\epsilon + a_n)\tau\sqrt{2n\log\log n}\} = \frac{1}{(\delta+1)\sqrt{\pi}}\Gamma(\delta+3/2), \tag{2.3.1}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为一 Gamma 函数及 $\tau = \sigma \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i$.

定理 2.3.2 假设 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 定义如 *(2.1.1)*, 其中 $\{a_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一实数序列满足 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty$ 以及 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一同分布的 φ- 混合随机变量序列满足 $E\varepsilon_i = 0, E\varepsilon_i^2 < \infty$ 及 $\sum_{m=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(m) < \infty$. 那么对于任意的 $\delta \geqslant 0$, 若 $E\big[\varepsilon_1^2(\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big] < \infty$, 我们有

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon^{2\delta+2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^{\delta}}{n} P\{|S_n| \geqslant \epsilon\tau\sqrt{n\log n}\} = \frac{\mu^{(2\delta+2)}}{\delta+1}\tau^{2\delta+2}, \tag{2.3.2}$$

其中 $\mu^{(2\delta+2)}$ 代表标准正态分布的 $(2\delta+2)$- 阶绝对矩.

当 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一同分布的 NA 随机变量序列满足均值为零方差有限且 $0 < \sigma^2 = E\varepsilon_1^2 + 2\sum_{k=2}^{\infty} E\varepsilon_1\varepsilon_k < \infty$ 时，以上结果同样成立.

定理 2.3.3 假设 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 如定义 *(2.1.1)*, 其中 $\{a_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一实数序列满足 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty$ 以及 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一同分布 *NA* 随机变量序列满足 $E\varepsilon_i = 0$ 及 $E\varepsilon_i^2 < \infty$. 令 $a_n = O(1/\log\log n)$. 那么对于任意的 $\delta \geqslant 0$, 若 $E\big[\varepsilon_1^2(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big] < \infty$, 则 *(2.3.1)* 仍然成立.

定理 2.3.4 假设 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 如定义 *(2.1.1)*, 其中 $\{a_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一实数序列满足 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty$ 以及 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一同分布的 *NA* 随机变量序列满足 $E\varepsilon_i = 0$ 及 $E\varepsilon_i^2 < \infty$. 那么对于任意的 $\delta \geqslant 0$, 若 $E\big[\varepsilon_1^2(\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big] < \infty$, 则 *(2.3.2)* 仍然成立.

注 2.3.1 令 $a_{i+k} = 1, i = k; a_{i+k} = 0, i \neq k, 1 \leqslant k \leqslant n$, 那么 $X_k = \varepsilon_k$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$. 可见当 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 为一同分布的 φ- 混合或 *NA* 随机变量序列，在某些适当的条件下 *(2.3.1)* 和 *(2.3.2)* 同样成立. 因此这些结果推广了 *Gut* 和 *Spătaru (2000a, b)* 上的结果.

不失一般性，下文中我们假设 $\tau = 1$．且我们只证明 φ- 混合随机变量的情况.

§2.3.2 定理 2.3.1 的证明

令 $c(\epsilon) := \exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}$, 且假设 $M > 4, 0 < \epsilon < 1/4$. 定理 2.3.1 的证明由四个命题组成.

命题 2.3.1 *令 $a_n = O(1/\log\log n)$. 那么对于任意的 $\delta \geqslant 0$, 我们有*

$$\lim_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2\delta+2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log\log n)^\delta}{n\log n} P\{|N| \geqslant (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n}\} = \frac{1}{(\delta+1)\sqrt{\pi}}\Gamma(\delta + 3/2), \tag{2.3.3}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数.

证明 此证明与 Zhang (2001b) 的命题 2.2 相似.

命题 2.3.2 *令 $a_n = O(1/\log\log n)$. 那么对于任意的 $\delta \geqslant 0$ 以及所有的 $M > 4$, 我们有*

$$\lim_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2\delta+2} \sum_{n\leqslant c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n\log n} \Big| P\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\} - P\{|N| \geqslant x\}\Big| = 0. \tag{2.3.4}$$

证明 令 $\Delta_n = \sup_x |P\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\} - P\{|N| \geqslant x\}|$. 那么根据引理 2.2.4, 当 $n \to \infty$ 时, $\Delta_n \to 0$. 则可得

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{(\log\log m)^{\delta+1}} \sum_{n=1}^{m} \frac{\Delta_n (\log\log n)^\delta}{n\log n} = 0.$$

因此我们得到当 $\epsilon \searrow 0$ 时,

$$
\begin{aligned}
&\epsilon^{2\delta+2} \sum_{n \leqslant c(\epsilon)} \frac{\Delta_n (\log\log n)^\delta}{n \log n} \\
= \;& \epsilon^{2\delta+2} (\log\log[c(\epsilon)])^{\delta+1} \frac{1}{(\log\log[c(\epsilon)])^{\delta+1}} \sum_{n \leqslant c(\epsilon)} \frac{\Delta_n (\log\log n)^\delta}{n \log n} \\
\leqslant \;& M^{\delta+1} \frac{1}{(\log\log[c(\epsilon)])^{\delta+1}} \sum_{n \leqslant c(\epsilon)} \frac{\Delta_n (\log\log n)^\delta}{n \log n} \to 0.
\end{aligned}
$$

命题 2.3.3 令 $a_n = O(1/\log\log n)$. 对于任意的 $\delta \geqslant 0$ 以及充分小的 $\epsilon > 0$, 一致成立

$$
\lim_{M \to \infty} \epsilon^{2\delta+2} \sum_{n > c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n \log n} P\{|N| \geqslant (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n}\} = 0. \tag{2.3.5}
$$

证明 证明参见张立新 (2004) 的引理 2.4.

命题 2.3.4 令 $a_n = O(1/\log\log n)$. 那么对于任意的 $\delta \geqslant 0$, 若 $E\varepsilon_1^2 < \infty$ 以及 $E\left[\varepsilon_1^2 (\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\right] < \infty$, 我们有

$$
\lim_{M \to \infty} \limsup_{\epsilon \searrow 0} \epsilon^{2\delta+2} \sum_{n > c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n \log n} P\{|S_n| \geqslant (\epsilon + a_n)\sqrt{2n\log\log n}\} = 0. \tag{2.3.6}
$$

证明 记 $a_{ni} = \sum_{k=1}^{n} a_{k+i}$. 那么 $\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}\varepsilon_i$. 令

$$
S_n' = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}\varepsilon_i I\{|a_{ni}\varepsilon_i| \leqslant \epsilon\sqrt{2n\log\log n}\}.
$$

那么对于 $n \geqslant c(\epsilon)$ 及 (2.2.9),

$$
\begin{aligned}
& (2n\log\log n)^{-1/2}|ES_n'| \\
= \;& (2n\log\log n)^{-1/2}\Big|\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}E\varepsilon_i I\{|a_{ni}\varepsilon_i| > \epsilon\sqrt{2n\log\log n}\}\Big| \\
\leqslant \;& (2n\log\log n)^{-1/2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_{ni}|E|\varepsilon_1|I\{|a_{ni}\varepsilon_1| > \epsilon\sqrt{2n\log\log n}\} \\
\leqslant \;& (2n\log\log n)^{-1/2}nE|\varepsilon_1|I\{\tilde{a}|\varepsilon_1| > \epsilon\sqrt{2n\log\log n}\} \\
\leqslant \;& (2n\log\log n)^{-1/2}nE|\varepsilon_1|I\{|\varepsilon_1| > \epsilon\sqrt{2n\log\log n}\} \\
\leqslant \;& n^{1/2}(2\log\log n)^{-1/2}(E|\varepsilon_1|^2)^{1/2}(P(|\varepsilon_1| > \epsilon\sqrt{2n\log\log n}))^{1/2} \\
\leqslant \;& n^{1/2}(2\log\log n)^{-1/2}\frac{E|\varepsilon_1|^2}{\epsilon(2n\log\log n)^{1/2}} \\
= \;& \frac{E|\varepsilon_1|^2}{2\epsilon\log\log n} \\
\leqslant \;& \frac{E|\varepsilon_1|^2}{2\epsilon\log\log c(\epsilon)} \\
= \;& \frac{\epsilon E|\varepsilon_1|^2}{2M}.
\end{aligned}
$$

所以，对于足够大的 M 以及所有的 $n \geqslant c(\epsilon)$, 有 $(2n\log\log n)^{-1/2}|ES_n'| < \epsilon/4$. 注意到对 $M > 4 + c_0$, $0 < \epsilon < 1/4$ 及 $n > c(\epsilon)$, 可得 $|a_n| \leqslant c_0/\log\log n \leqslant c_0M^{-1}\epsilon^2 < \epsilon/4$. 那么

$$
\begin{aligned}
& P\{|S_n| \geqslant (\epsilon + a_n)\sqrt{2n\log\log n}\} \\
\leqslant \;& P\{|S_n| \geqslant \epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2\}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \quad P\{\sup_i |a_{ni}\varepsilon_i| > \epsilon\sqrt{2n\log\log n}\} + P\{|S_n' - ES_n'| \geqslant \epsilon\sqrt{2n\log\log n}/4\}$$

$$=: \quad I_1 + I_2.$$

对于 I_1 以及任意的 $\delta \geqslant 0$, 利用 (2.2.10) 我们有

$$\sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n\log n} I_1$$

$$\leqslant \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n\log n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} P\{|a_{ni}\varepsilon_1| > \epsilon\sqrt{2n\log\log n}\}$$

$$\leqslant \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n\log n} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i\in I_{nj}} P\{|\varepsilon_1| \geqslant j^{1/p}\epsilon\sqrt{2n\log\log n}\}$$

$$\leqslant \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n\log n} \sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj}) \sum_{k\geqslant j(2n\log\log n)^{p/2}} P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\}$$

$$\leqslant \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n\log n} \sum_{k=(2n\log\log n)^{p/2}}^{\infty} \sum_{j=1}^{[k/(2n\log\log n)^{p/2}]} (\sharp I_{nj})$$

$$P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\}$$

$$\leqslant \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n\log n} \sum_{k=(2n\log\log n)^{p/2}}^{\infty} n\left(\frac{k}{(2n\log\log n)^{p/2}} + 1\right)^{1/p}$$

$$P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\}$$

$$\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{\log n} \frac{1}{\sqrt{2n\log\log n}} \sum_{k=(2n\log\log n)^{p/2}}^{\infty} k^{1/p}$$

$$P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{\log n}\frac{1}{\sqrt{2n\log\log n}}\sum_{k=n}^{\infty}\sqrt{2k\log\log k}\\
&\quad P\{2k\log\log k\leqslant\epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<2(k+1)\log\log(k+1)\}\\
&\leqslant C\sum_{k>c(\epsilon)}\sum_{c(\epsilon)<n\leqslant k}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{\log n}\frac{1}{\sqrt{2n\log\log n}}\sqrt{2k\log\log k}\\
&\quad P\{2k\log\log k\leqslant\epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<2(k+1)\log\log(k+1)\}\\
&\leqslant C\sum_{k>c(\epsilon)}\frac{\sqrt{k}}{\log k}(\log\log k)^{\delta-1/2}\sqrt{2k\log\log k}\\
&\quad P\{2k\log\log k\leqslant\epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<2(k+1)\log\log(k+1)\}\\
&\leqslant C\sum_{k>c(\epsilon)}2k\log\log k\frac{(\log\log k)^{\delta-1}}{\log k}\\
&\quad P\{2k\log\log k\leqslant\epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<2(k+1)\log\log(k+1)\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-2}E\big[\varepsilon_1^2(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big]I\big\{|\varepsilon_1|^2\geqslant 2M\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\big\}.
\end{aligned}
$$

则可得对任意的 $\delta\geqslant 0$,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}I_1\\
\leqslant\ & C\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta}E\big[\varepsilon_1^2(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big]I\big\{|\varepsilon_1|^2\geqslant 2M\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\big\}\\
=\ & 0.
\end{aligned}\tag{2.3.7}
$$

现在开始估计 I_2, 注意到 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\varphi^{1/2}(m)<\infty$, 可得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{-\infty\leqslant l\leqslant m\leqslant\infty} E\Big(\sum_{i=l}^{m} a_{ni}\varepsilon_i I\{|a_{ni}\varepsilon_i|\leqslant\epsilon\sqrt{2n\log\log n}\}\\
&\qquad -E\sum_{i=l}^{m} a_{ni}\varepsilon_i I\{|a_{ni}\varepsilon_i|\leqslant\epsilon\sqrt{2n\log\log n}\}\Big)^2\\
&\leqslant C\sum_{i=-\infty}^{\infty} E(a_{ni}\varepsilon_i)^2 I\{|a_{ni}\varepsilon_i|\leqslant\epsilon\sqrt{2n\log\log n}\}\\
&= C\sum_{i=-\infty}^{\infty} E(a_{ni}\varepsilon_1)^2 I\{|a_{ni}\varepsilon_1|\leqslant\epsilon\sqrt{2n\log\log n}\}.
\end{aligned}
\tag{2.3.8}
$$

那么由引理 2.2.2, 对 $q\geqslant 2$ 我们有,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= P\{|S_n' - ES_n'|\geqslant\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/4\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}(2n\log\log n)^{-q/2}E|S_n'-ES_n'|^q\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}(2n\log\log n)^{-q/2}\Big\{\Big(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}^2E\varepsilon_i^2 I\{|a_{ni}\varepsilon_i|\leqslant\epsilon\sqrt{2n\log\log n}\}\Big)^{q/2}\\
&\qquad +E\max_i|a_{ni}\varepsilon_i|^q I\{|a_{ni}\varepsilon_i|\leqslant\epsilon\sqrt{2n\log\log n}\}\Big\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}(2n\log\log n)^{-q/2}\Big(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}^2E\varepsilon_1^2 I\{|a_{ni}\varepsilon_1|\leqslant\epsilon\sqrt{2n\log\log n}\}\Big)^{q/2}\\
&\qquad +C\epsilon^{-q}(2n\log\log n)^{-q/2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} E|a_{ni}\varepsilon_1|^q I\{|a_{ni}\varepsilon_1|\leqslant\epsilon\sqrt{2n\log\log n}\}\\
&=: I_3+I_4.
\end{aligned}
$$

对于 I_3, 选取 $q>2+2\delta$. 由于对 $M>4$ 及 $0<\epsilon<1/4$, 有 $c(\epsilon)-1\geqslant\sqrt{c(\epsilon)}$,

那么

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} I_3 \\
\leqslant\ & C \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} \epsilon^{-q} (2n\log\log n)^{-q/2} \Big(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}^2 E\varepsilon_1^2\Big)^{q/2} \\
\leqslant\ & C \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} \epsilon^{-q} (2n\log\log n)^{-q/2} n^{q/2} \\
\leqslant\ & C \sum_{n>c(\epsilon)} \epsilon^{-q} \frac{(\log\log n)^{\delta-q/2}}{n\log n} \\
\leqslant\ & C\epsilon^{-q} \int_{c(\epsilon)-1}^{\infty} \frac{(\log\log x)^{\delta-q/2}}{x\log x} \mathrm{d}x \\
\leqslant\ & C\epsilon^{-q} \int_{\sqrt{c(\epsilon)}}^{\infty} \frac{(\log\log x)^{\delta-q/2}}{x\log x} \mathrm{d}x \\
\leqslant\ & C\epsilon^{-q} \int_{M/2\epsilon^2}^{\infty} y^{\delta-q/2} \mathrm{d}y = C\epsilon^{-2\delta-2} M^{\delta-q/2+1}.
\end{aligned}
$$

因此对 $q>2+2\delta$, 我们得到

$$
\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2\delta+2} \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} I_3 \leqslant C \lim_{M\to\infty} M^{\delta-q/2+1} = 0. \tag{2.3.9}
$$

对于 I_4, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} I_4 \\
\leqslant\ & C \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} \epsilon^{-q} (2n\log\log n)^{-q/2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i\in I_{nj}} E|a_{ni}\varepsilon_1|^q \\
& I\{|a_{ni}\varepsilon_1| \leqslant \epsilon\sqrt{2n\log\log n}\}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \quad C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}\epsilon^{-q}(2n\log\log n)^{-q/2}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q$$

$$I\{|\varepsilon_1|\leqslant \epsilon(j+1)^{1/p}\sqrt{2n\log\log n}\}$$

$$\leqslant \quad C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}\epsilon^{-q}(2n\log\log n)^{-q/2}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q$$

$$\sum_{k=0}^{(j+1)(2n\log\log n)^{p/2}} I\{k\leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}$$

$$\leqslant \quad C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}\epsilon^{-q}(2n\log\log n)^{-q/2}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q$$

$$\sum_{k=0}^{2(2n\log\log n)^{p/2}-1} I\{k\leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}$$

$$+C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}\epsilon^{-q}(2n\log\log n)^{-q/2}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q$$

$$\sum_{k=2(2n\log\log n)^{p/2}}^{(j+1)(2n\log\log n)^{p/2}} I\{k\leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}$$

$$=: \quad I_5+I_6.$$

那么由 (2.2.15), 对于 I_5, 选取 $q>(2\vee 2\delta)$, 可得

$$I_5 \quad \leqslant \quad C\epsilon^{-q}\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}(2n\log\log n)^{-q/2}nE|\varepsilon_1|^q$$

$$\sum_{k=0}^{2(2n\log\log n)^{p/2}-1} I\{k\leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\epsilon^{-q}\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{\log n}(2n\log\log n)^{-q/2}E|\varepsilon_1|^q\\
&\quad\sum_{k=0}^{n-1}I\{2^{2/p+1}k\log\log k\leqslant\epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<2^{2/p+1}(k+1)\log\log(k+1)\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}\sum_{k>c(\epsilon)}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{\log n}(2n\log\log n)^{-q/2}E|\varepsilon_1|^q\\
&\quad I\{2^{2/p+1}k\log\log k\leqslant\epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<2^{2/p+1}(k+1)\log\log(k+1)\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}\sum_{k>c(\epsilon)}\frac{k^{1-q/2}}{\log k}(\log\log k)^{\delta-q/2}E|\varepsilon_1|^q\\
&\quad I\{2^{2/p+1}k\log\log k\leqslant\epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<2^{2/p+1}(k+1)\log\log(k+1)\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-2}E\big[\varepsilon_1^2(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big]I\big\{|\varepsilon_1|^2\geqslant 2^{2/p+1}M\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\big\}.
\end{aligned}
$$

因此对于任意的 $\delta\geqslant 0$,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}I_5\\
\leqslant\ & C\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta}E\big[\varepsilon_1^2(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big]I\big\{|\varepsilon_1|^2\geqslant 2^{2/p+1}M\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\big\}\\
=\ & 0. \qquad (2.3.10)
\end{aligned}
$$

对于 I_6, 同样利用 (2.2.15), 我们有

$$
\begin{aligned}
I_6\ \leqslant\ & C\epsilon^{-q}\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}(2n\log\log n)^{-q/2}\sum_{k=2(2n\log\log n)^{p/2}}^{\infty}\\
&\sum_{j=k/(2n\log\log n)^{p/2}-1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^qI\{k\leqslant\epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \quad C\epsilon^{-q}\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}(2n\log\log n)^{-q/2}\sum_{k=2(2n\log\log n)^{p/2}}^{\infty}$$

$$n\Big(\frac{k}{(2n\log\log n)^{p/2}}\Big)^{-(q-1)/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant\epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}$$

$$= \quad C\epsilon^{-q}\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{\log n}(2n\log\log n)^{-q/2}(2n\log\log n)^{(q-1)/2}$$

$$\sum_{k=2(2n\log\log n)^{p/2}}^{\infty}k^{-(q-1)/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant\epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}$$

$$\leqslant \quad C\epsilon^{-q}\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{\log n}(2n\log\log n)^{-1/2}\sum_{k=n}^{\infty}(2k\log\log k)^{-(q-1)/2}$$

$$E|\varepsilon_1|^q I\{2^{2/p+1}k\log\log k\leqslant\epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<2^{2/p+1}(k+1)\log\log(k+1)\}$$

$$\leqslant \quad C\epsilon^{-q}\sum_{k>c(\epsilon)}\sum_{c(\epsilon)<n\leqslant k}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{\log n}(2n\log\log n)^{-1/2}(2k\log\log k)^{-(q-1)/2}$$

$$E|\varepsilon_1|^q I\{2^{2/p+1}k\log\log k\leqslant\epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<2^{2/p+1}(k+1)\log\log(k+1)\}$$

$$\leqslant \quad C\epsilon^{-q}\sum_{k>c(\epsilon)}\frac{\sqrt{k}}{\log k}(\log\log k)^{\delta-1/2}(2k\log\log k)^{-(q-1)/2}$$

$$E|\varepsilon_1|^q I\{2^{2/p+1}k\log\log k\leqslant\epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<2^{2/p+1}(k+1)\log\log(k+1)\}$$

$$\leqslant \quad C\epsilon^{-q}\sum_{k>c(\epsilon)}(k\log\log k)^{1-q/2}(\log k)^{-1}(\log\log k)^{\delta-1}$$

$$E|\varepsilon_1|^q I\{2^{2/p+1}k\log\log k\leqslant\epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<2^{2/p+1}(k+1)\log\log(k+1)\}$$

$$\leqslant \quad C\epsilon^{-2}E\big[\varepsilon_1^2(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big]I\big\{|\varepsilon_1|^2\geqslant 2^{2/p+1}M\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\big\}.$$

那么与 I_5 相似，对于任意的 $\delta \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}I_6 \\
\leqslant\ & C\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta}E\big[\varepsilon_1^2(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big]I\big\{|\varepsilon_1|^2 \geqslant 2^{2/p+1}M\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\big\} \\
=\ & 0. \qquad (2.3.11)
\end{aligned}$$

因此根据 (2.3.10) 以及 (2.3.11), 得到对于任意的 $\delta \geqslant 0$,

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}I_4 = 0. \qquad (2.3.12)$$

最后综合 (2.3.7), (2.3.9) 以及 (2.3.12), 此命题得证.

§2.3.3 定理 2.3.2 的证明

令 $d(\epsilon) := \exp\{M/\epsilon^2\}$, 其中 $M > 1$. 为了证明定理 2.3.2, 我们只需要证明以下四个命题.

命题 2.3.5 对于任意的 $\delta \geqslant 0$,

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}P\{|N| \geqslant \epsilon\sqrt{\log n}\} = \frac{\mu^{(2\delta+2)}}{\delta+1}. \qquad (2.3.13)$$

证明 只要证明对任意的 $q > 0$,

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}P\{|N| \geqslant q\epsilon\sqrt{\log n}\} = q^{-2(\delta+1)}\frac{\mu^{(2\delta+2)}}{\delta+1}.$$

则有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}P\{|N|\geqslant q\epsilon\sqrt{\log n}\}\\
=\ &\lim_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}\int_{e}^{\infty}\frac{(\log x)^{\delta}}{x}P\{|N|\geqslant q\epsilon\sqrt{\log x}\}\mathrm{d}x\\
=\ &2q^{-2(\delta+1)}\lim_{\epsilon\searrow 0}\int_{q\epsilon}^{\infty}y^{2\delta+1}P\{|N|\geqslant y\}\mathrm{d}y=q^{-2(\delta+1)}\frac{\mu^{(2\delta+2)}}{\delta+1}.
\end{aligned}$$

命题 2.3.6 对于任意的 $\delta\geqslant 0$ 及 $M>1$, 我们有

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}\sum_{n\leqslant d(\epsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\sup_{x}\Big|P\{|S_n|\geqslant x\sqrt{n}\}-P\{|N|\geqslant x\}\Big|=0. \tag{2.3.14}$$

证明 令 $\Delta_n=\sup_x\Big|P\{|S_n|\geqslant x\sqrt{n}\}-P\{|N|\geqslant x\}\Big|$. 由引理 2.2.4, 当 $n\to\infty$ 时, $\Delta_n\to 0$. 那么就有

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{(\log m)^{\delta+1}}\sum_{n=1}^{m}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\Delta_n=0.$$

因此我们得到当 $\epsilon\searrow 0$ 时,

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{2\delta+2}\sum_{n\leqslant d(\epsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\sup_{x}\Big|P\{|S_n|\geqslant x\sqrt{n}\}-P\{|N|\geqslant x\}\Big|\\
=\ &\epsilon^{2\delta+2}\sum_{n\leqslant d(\epsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\Delta_n=\epsilon^{2\delta+2}(\log[d(\epsilon)])^{\delta+1}\frac{1}{(\log[d(\epsilon)])^{\delta+1}}\sum_{n\leqslant d(\epsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\Delta_n\\
\leqslant\ &M^{\delta+1}\frac{1}{(\log[d(\epsilon)])^{\delta+1}}\sum_{n\leqslant d(\epsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\Delta_n\to 0.
\end{aligned}$$

此命题证明完毕.

命题 2.3.7 对于任意的 $\delta\geqslant 0$ 以及充分小的 $\epsilon>0$, 一致成立

$$\lim_{M\to\infty}\epsilon^{2\delta+2}\sum_{n>d(\epsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}P\{|N|\geqslant\epsilon\sqrt{\log n}\}=0. \tag{2.3.15}$$

证明 对充分小的 $\epsilon > 0$ (与 M 独立), 有 $d(\epsilon) > e$ 以及 $d(\epsilon) - 1 \geqslant \sqrt{d(\epsilon)}$. 那么

$$
\begin{aligned}
&\epsilon^{2\delta+2} \sum_{n>d(\epsilon)} \frac{(\log n)^\delta}{n} P\{|N| \geqslant \epsilon\sqrt{\log n}\} \\
\leqslant\ & \epsilon^{2\delta+2} \int_{d(\epsilon)-1}^{\infty} \frac{(\log x)^\delta}{x} P\{|N| \geqslant \epsilon\sqrt{\log x}\} \mathrm{d}x \\
\leqslant\ & \epsilon^{2\delta+2} \int_{\sqrt{d(\epsilon)}}^{\infty} \frac{(\log x)^\delta}{x} P\{|N| \geqslant \epsilon\sqrt{\log x}\} \mathrm{d}x \\
=\ & 2\int_{\sqrt{M/2}}^{\infty} y^{2\delta+1} P\{|N| \geqslant y\} \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

令 $M \to \infty$, 从而得到 (2.3.15).

命题 2.3.8 对于任意的 $\delta \geqslant 0$, 若 $E\varepsilon_1^2 < \infty$ 以及 $E\left[\varepsilon_1^2(\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\right] < \infty$, 那么

$$
\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon \searrow 0} \epsilon^{2\delta+2} \sum_{n>d(\epsilon)} \frac{(\log n)^\delta}{n} P\{|S_n| \geqslant \epsilon\sqrt{n\log n}\} = 0. \tag{2.3.16}
$$

证明 此证明与命题 2.3.1 的证明相似. 令 $S_n'' = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}\varepsilon_i I\{|a_{ni}\varepsilon_i| \leqslant \epsilon\sqrt{n\log n}\}$. 那么对 $n \geqslant d(\epsilon)$, 由 (2.2.9) 得到

$$
\begin{aligned}
(n\log n)^{-1/2}|ES_n''| &= (n\log n)^{-1/2}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}E\varepsilon_i I\{|a_{ni}\varepsilon_i| > \epsilon\sqrt{n\log n}\}\right| \\
&\leqslant (n\log n)^{-1/2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_{ni}|E|\varepsilon_1| I\{|a_{ni}\varepsilon_1| > \epsilon\sqrt{n\log n}\} \\
&\leqslant (n\log n)^{-1/2} nE|\varepsilon_1| I\{\tilde{a}|\varepsilon_1| > \epsilon\sqrt{n\log n}\} \\
&\leqslant (n\log n)^{-1/2} nE|\varepsilon_1| I\{|\varepsilon_1| > \epsilon\sqrt{n\log n}\}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \quad n^{1/2}(\log n)^{-1/2}(E|\varepsilon_1|^2)^{1/2}(P(|\varepsilon_1| > \epsilon\sqrt{n\log n}))^{1/2}$$

$$\leqslant \quad n^{1/2}(\log n)^{-1/2}\frac{E|\varepsilon_1|^2}{\epsilon(n\log n)^{1/2}} = \frac{E|\varepsilon_1|^2}{\epsilon\log n}$$

$$\leqslant \quad \frac{E|\varepsilon_1|^2}{\epsilon\log d(\epsilon)} = \frac{\epsilon E|\varepsilon_1|^2}{M}.$$

因此，对足够大的 M 以及所有的 $n \geqslant d(\epsilon)$, 我们有 $(n\log n)^{-1/2}|ES_n''| < \epsilon/2$. 那么

$$P\{|S_n| \geqslant \epsilon\sqrt{n\log n}\}$$

$$\leqslant \quad P\{\sup_i |a_{ni}\varepsilon_i| > \epsilon\sqrt{n\log n}\} + P\{|S_n'' - ES_n''| \geqslant \epsilon\sqrt{n\log n}/2\} := I_1 + I_2.$$

对于 I_1 以及任意的 $\delta \geqslant 0$, 由 (2.2.10) 有

$$\sum_{n>d(\epsilon)} \frac{(\log n)^\delta}{n} I_1$$

$$\leqslant \quad \sum_{n>d(\epsilon)} \frac{(\log n)^\delta}{n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} P\{|a_{ni}\varepsilon_1| > \epsilon\sqrt{n\log n}\}$$

$$\leqslant \quad \sum_{n>d(\epsilon)} \frac{(\log n)^\delta}{n} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i\in I_{nj}} P\{|\varepsilon_1| \geqslant j^{1/p}\epsilon\sqrt{n\log n}\}$$

$$\leqslant \quad \sum_{n>d(\epsilon)} \frac{(\log n)^\delta}{n} \sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj}) \sum_{k\geqslant j(n\log n)^{p/2}} P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\}$$

$$\leqslant \quad \sum_{n>d(\epsilon)} \frac{(\log n)^\delta}{n} \sum_{k=(n\log n)^{p/2}}^{\infty} \sum_{j=1}^{[k/(n\log n)^{p/2}]} (\sharp I_{nj}) P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\}$$

$$\leqslant \quad \sum_{n>d(\epsilon)} \frac{(\log n)^\delta}{n} \sum_{k=(n\log n)^{p/2}}^{\infty} n(\frac{k}{(n\log n)^{p/2}} + 1)^{1/p} P\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\sum_{n>d(\epsilon)}(\log n)^{\delta}\frac{1}{\sqrt{n\log n}}\sum_{k=(n\log n)^{p/2}}^{\infty}k^{1/p}P\{k\leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}\\
&\leqslant C\sum_{n>d(\epsilon)}(\log n)^{\delta}\frac{1}{\sqrt{n\log n}}\sum_{k=n}^{\infty}\sqrt{k\log k}\\
&\quad\cdot P\{k\log k\leqslant \epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<(k+1)\log(k+1)\}\\
&\leqslant C\sum_{k>d(\epsilon)}\sum_{d(\epsilon)<n\leqslant k}(\log n)^{\delta}\frac{1}{\sqrt{n\log n}}\sqrt{k\log k}\\
&\quad\cdot P\{k\log k\leqslant \epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<(k+1)\log(k+1)\}\\
&\leqslant C\sum_{k>d(\epsilon)}\sqrt{k}(\log k)^{\delta-1/2}\sqrt{k\log k}P\{k\log k\leqslant \epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<(k+1)\log(k+1)\}\\
&\leqslant C\sum_{k>d(\epsilon)}k\log k(\log k)^{\delta-1}P\{k\log k\leqslant \epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<(k+1)\log(k+1)\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-2}E\big[\varepsilon_1^2(\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big]I\big\{|\varepsilon_1|^2\geqslant M\exp\{M/\epsilon^2\}\big\}.
\end{aligned}
$$

由此得，对任意的 $\delta\geqslant 0$,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}\sum_{n>d(\epsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}I_1\\
\leqslant\ & C\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta}E\big[\varepsilon_1^2(\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big]I\big\{|\varepsilon_1|^2\geqslant M\exp\{M/\epsilon^2\}\big\}\\
=\ & 0. \qquad (2.3.17)
\end{aligned}
$$

对于 I_2, 与命题 2.3.1 相似，由引理 2.2.2, 对 $q\geqslant 2$, 有

$$
I_2=P\{|S_n''-ES_n''|\geqslant \epsilon\sqrt{n\log n}/2\}\leqslant C\epsilon^{-q}(n\log n)^{-q/2}E|S_n''-ES_n''|^q
$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant C\epsilon^{-q}(n\log n)^{-q/2}\Big\{\Big(\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ni}^2E\varepsilon_i^2I\{|a_{ni}\varepsilon_i|\leqslant\epsilon\sqrt{n\log n}\}\Big)^{q/2}\\
&\quad+E\max_i|a_{ni}\varepsilon_i|^qI\{|a_{ni}\varepsilon_i|\leqslant\epsilon\sqrt{n\log n}\}\Big\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}(n\log n)^{-q/2}\Big(\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ni}^2E\varepsilon_1^2I\{|a_{ni}\varepsilon_1|\leqslant\epsilon\sqrt{n\log n}\}\Big)^{q/2}\\
&\quad+C\epsilon^{-q}(n\log n)^{-q/2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}E|a_{ni}\varepsilon_1|^qI\{|a_{ni}\varepsilon_1|\leqslant\epsilon\sqrt{n\log n}\}\\
&=:\ I_3+I_4.
\end{aligned}$$

对于 I_3, 选取 $q>2+2\delta$. 注意到 $d(\epsilon)-1\geqslant\sqrt{d(\epsilon)}$, 那么

$$\begin{aligned}
\sum_{n>d(\epsilon)}\frac{(\log n)^\delta}{n}I_3 &\leqslant C\sum_{n>d(\epsilon)}\frac{(\log n)^\delta}{n}\epsilon^{-q}(n\log n)^{-q/2}\Big(\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ni}^2E\varepsilon_1^2\Big)^{q/2}\\
&\leqslant C\sum_{n>d(\epsilon)}\frac{(\log n)^\delta}{n}\epsilon^{-q}(n\log n)^{-q/2}n^{q/2}\\
&\leqslant C\sum_{n>d(\epsilon)}\epsilon^{-q}\frac{(\log n)^{\delta-q/2}}{n}\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}\int_{d(\epsilon)-1}^{\infty}\frac{(\log x)^{\delta-q/2}}{x}\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}\int_{\sqrt{d(\epsilon)}}^{\infty}\frac{(\log x)^{\delta-q/2}}{x}\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}\int_{M/2\epsilon^2}^{\infty}y^{\delta-q/2}\mathrm{d}y\\
&= C\epsilon^{-2\delta-2}M^{\delta-q/2+1}.
\end{aligned}$$

因此对 $q>2+2\delta$, 得到

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}\sum_{n>d(\epsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}I_3\leqslant C\lim_{M\to\infty}M^{\delta-q/2+1}=0. \tag{2.3.18}$$

对于 I_4, 同样的和命题 2.3.1 相似，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n>d(\epsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}I_4\\
\leqslant\ & C\sum_{n>d(\epsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\epsilon^{-q}(n\log n)^{-q/2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i\in I_{nj}}E|a_{ni}\varepsilon_1|^q I\{|a_{ni}\varepsilon_1|\leqslant\epsilon\sqrt{n\log n}\}\\
\leqslant\ & C\sum_{n>d(\epsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\epsilon^{-q}(n\log n)^{-q/2}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q\\
& I\{|\varepsilon_1|\leqslant\epsilon(j+1)^{1/p}\sqrt{n\log n}\}\\
\leqslant\ & C\sum_{n>d(\epsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\epsilon^{-q}(n\log n)^{-q/2}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q\\
& \sum_{k=0}^{(j+1)(n\log n)^{p/2}}I\{k\leqslant\epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}\\
\leqslant\ & C\sum_{n>d(\epsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\epsilon^{-q}(n\log n)^{-q/2}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q\\
& \sum_{k=0}^{2(n\log n)^{p/2}-1}I\{k\leqslant\epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}\\
& +C\sum_{n>d(\epsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}\epsilon^{-q}(n\log n)^{-q/2}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q\\
& \sum_{k=2(n\log n)^{p/2}}^{(j+1)(n\log n)^{p/2}}I\{k\leqslant\epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}\\
=:\ & I_5+I_6.
\end{aligned}$$

那么对于 I_5, 由 (2.2.15), 选取 $q > (2 \vee 2\delta)$, 得到

$$
\begin{aligned}
I_5 \leqslant & \; C\epsilon^{-q} \sum_{n>d(\epsilon)} \frac{(\log n)^\delta}{n}(n\log n)^{-q/2} nE|\varepsilon_1|^q \\
& \sum_{k=0}^{2(n\log n)^{p/2}-1} I\{k \leqslant \epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p < k+1\} \\
\leqslant & \; C\epsilon^{-q} \sum_{n>d(\epsilon)} (\log n)^\delta (n\log n)^{-q/2} E|\varepsilon_1|^q \\
& \sum_{k=0}^{n-1} I\{2^{2/p} k\log\log k \leqslant \epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2 < 2^{2/p}(k+1)\log(k+1)\} \\
\leqslant & \; C\epsilon^{-q} \sum_{k>d(\epsilon)} \sum_{n=k+1}^{\infty} (\log n)^\delta (n\log n)^{-q/2} E|\varepsilon_1|^q \\
& I\{2^{2/p} k\log k \leqslant \epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2 < 2^{2/p}(k+1)\log(k+1)\} \\
\leqslant & \; C\epsilon^{-q} \sum_{k>d(\epsilon)} k^{1-q/2}(\log k)^{\delta-q/2} E|\varepsilon_1|^q \\
& I\{2^{2/p} k\log k \leqslant \epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2 < 2^{2/p}(k+1)\log(k+1)\} \\
\leqslant & \; C\epsilon^{-2} E\big[\varepsilon_1^2(\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big] I\big\{|\varepsilon_1|^2 \geqslant 2^{2/p} M\exp\{M/\epsilon^2\}\big\}.
\end{aligned}
$$

因此对于任意的 $\delta \geqslant 0$,

$$
\begin{aligned}
& \lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2\delta+2} I_5 \\
\leqslant & \; C \lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2\delta} E\big[\varepsilon_1^2(\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big] I\big\{|\varepsilon_1|^2 \geqslant 2^{2/p} M\exp\{M/\epsilon^2\}\big\} \\
= & \; 0. \qquad (2.3.19)
\end{aligned}
$$

对于 I_6, 再利用 (2.2.15), 有

$$\begin{aligned}
I_6 &\leqslant C\epsilon^{-q}\sum_{n>d(\epsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}(n\log n)^{-q/2}\sum_{k=2(n\log n)^{p/2}}^{\infty}\\
&\quad\sum_{j=k/(n\log n)^{p/2}-1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant\epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}\sum_{n>d(\epsilon)}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}(n\log n)^{-q/2}\\
&\quad\sum_{k=2(n\log n)^{p/2}}^{\infty}n\Big(\frac{k}{(n\log n)^{p/2}}\Big)^{-(q-1)/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant\epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}\\
&= C\epsilon^{-q}\sum_{n>d(\epsilon)}(\log n)^{\delta}(n\log n)^{-q/2}(n\log n)^{(q-1)/2}\\
&\quad\sum_{k=2(n\log n)^{p/2}}^{\infty}k^{-(q-1)/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant\epsilon^{-p}|\varepsilon_1|^p<k+1\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}\sum_{n>d(\epsilon)}(\log n)^{\delta}\frac{1}{\sqrt{n\log n}}\sum_{k=n}^{\infty}(k\log k)^{-(q-1)/2}E|\varepsilon_1|^q\\
&\quad I\{2^{2/p}k\log k\leqslant\epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<2^{2/p}(k+1)\log(k+1)\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}\sum_{k>d(\epsilon)}\sum_{d(\epsilon)<n\leqslant k}(\log n)^{\delta}\frac{1}{\sqrt{n\log n}}(k\log k)^{-(q-1)/2}E|\varepsilon_1|^q\\
&\quad I\{2^{2/p}k\log k\leqslant\epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<2^{2/p}(k+1)\log(k+1)\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-q}\sum_{k>d(\epsilon)}\sqrt{k}(\log k)^{\delta-1/2}(k\log k)^{-(q-1)/2}E|\varepsilon_1|^q\\
&\quad I\{2^{2/p}k\log k\leqslant\epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<2^{2/p}(k+1)\log(k+1)\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C\epsilon^{-q}\sum_{k>d(\epsilon)}(k\log k)^{1-q/2}(\log k)^{\delta-1}E|\varepsilon_1|^q \\
&\quad I\{2^{2/p}k\log k\leqslant \epsilon^{-2}|\varepsilon_1|^2<2^{2/p}(k+1)\log(k+1)\} \\
&\leqslant C\epsilon^{-2}E\big[\varepsilon_1^2(\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big]I\big\{|\varepsilon_1|^2\geqslant 2^{2/p}M\exp\{M/\epsilon^2\}\big\}.
\end{aligned}
$$

那么和证明 I_5 相同，对于任意的 $\delta\geqslant 0$,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}I_6 \\
&\leqslant C\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta}E\big[\varepsilon_1^2(\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big]I\big\{|\varepsilon_1|^2\geqslant 2^{2/p}M\exp\{M/\epsilon^2\}\big\} \\
&= 0. \qquad (2.3.20)
\end{aligned}
$$

所以由 (2.3.19) 及 (2.3.20), 对任意的 $\delta\geqslant 0$, 我们得到,

$$
\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}\sum_{n>d(\epsilon)}\frac{(\log n)^\delta}{n}I_4=0. \qquad (2.3.21)
$$

最后结合 (2.3.17), (2.3.18) 以及 (2.3.21), 此命题得证.

§2.3.4 定理 2.3.3 和定理 2.3.4 的证明

证明 此证明除了一些小细节外，与定理 2.3.1 及定理 2.3.2 的证明相似. 比如，在证明过程中我们用引理 2.2.3 去代替引理 2.2.2.

第四节 由负相伴序列产生的线性过程的矩完全收敛性

§2.4.1 介绍和主要结果

假设 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一同分布的 NA 随机变量序列，均值为零，方差有限. 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, n \geqslant 1$, 其中 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 定义如 (2.1.1).

Zhang (1996) 得到了关于线性过程完全收敛性的结果 — 定理 2.A. Yu 和 Wang (2002) 也讨论了 NA 假设下线性过程的完全收敛性问题. Liang (2000) 得到了一些关于加权 NA 随机变量序列的完全收敛的一般结果，其中也包括了线性过程.

当 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 为服从分布 F, 均值为零，方差为正且有限的 i.i.d. 随机变量序列时， Chow (1988) 得到了定理 2.E 这种关于矩的完全收敛性结果. 王定成和苏淳 (2002) 还讨论了 B 值独立同分布随机变元序列的矩完全收敛性.

本节的主要目的就是为了证明在 NA 的相依假设下线性过程关于此种形式的矩完全收敛性结果也同样成立.

定理 2.4.1 *假设 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 定义如 (2.1.1), 其中 $\{a_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一实数序列满足 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty$ 以及 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一同分布的 NA 随*

机变量序列满足 $E\varepsilon_1=0, E\varepsilon_1^2<\infty$. 令 $h(x)>0(x>0)$ 为一缓变函数及 $1\leqslant p<2, r>1+p/2$. 那么若 $E|\varepsilon_1|^r h(|\varepsilon_1|^p)<\infty$, 则对所有的 $\epsilon>0$ 成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) E\{|S_n|-\epsilon n^{1/p}\}_+<\infty. \tag{2.4.1}$$

注 2.4.1 令 $a_{i+k}=1, i=k; a_{i+k}=0, i\neq k, 1\leqslant k\leqslant n$, 那么 $X_k=\varepsilon_k$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} X_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k$. 可见当 $\{X_k; k\geqslant 1\}$ 为一同分布的 NA 随机变量序列时，在某些适当的条件下 *(2.4.1)* 同样成立.

注 2.4.2 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) E\{|S_n|-\epsilon n^{1/p}\}_+ \\
=\ & \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_0^{\infty} P\{|S_n|-\epsilon n^{1/p}>x\}\mathrm{d}x \\
=\ & \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) P\{|S_n|>(\epsilon+y) n^{1/p}\} n^{1/p}\mathrm{d}y \\
=\ & \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} h(n) P\{|S_n|>(\epsilon+y) n^{1/p}\}\mathrm{d}y<\infty.
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

从 *(2.4.2)* 可以看到，我们得到的矩完全收敛性是可以推出完全收敛性的，这就意味着，在定理 *2.4.1* 的条件下，结果 *(2.4.1)* 可得对所有 $\epsilon>0$ 成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} h(n) P\{|S_n|>\epsilon n^{1/p}\}<\infty.$$

§2.4.2 引理和定理的证明

以下这个引理非常有用. 证明参见 Shao (2000).

引理 2.4.1 令 $\{X_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 为一 NA 随机变量序列均值为零, 二阶矩有限. 记 $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, $1 \leqslant k \leqslant n$, 以及 $B_n = \sum_{i=1}^{n} EX_i^2$. 那么对所有的 $x > 0$ 及 $y > 0$,

$$P(\max_{k\leqslant n}|S_k| \geqslant x) \leqslant 2P(\max_{k\leqslant n}|X_k| \geqslant y) + 4\exp\{-\frac{x^2}{8B_n}\} +4\left(\frac{B_n}{4(xy+B_n)}\right)^{x/(12y)} \tag{2.4.3}$$

定理 2.4.1 **的证明** 记 $a_{ni} = \sum_{k=1}^{n} a_{k+i}$. 那么 $\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}\varepsilon_i$. 令 $\lambda = (E\varepsilon_1^2)^{-1/2}$, 则由 (2.2.9), $B_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}^2 E\varepsilon_i^2 \leqslant n\lambda^{-2}$. 在引理 2.4.1 中取 $y = \beta x$ (其中 $\beta > 0$, 其值待定), 那么

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p}h(n)E\{|S_n| - \epsilon n^{1/p}\}_+ \\
= &\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p}h(n)\int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} P\{|S_n| \geqslant x\}dx \\
\leqslant &\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p}h(n)\int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} \{2P\{\max_i|a_{ni}\varepsilon_i| > \beta x\} \\
&+4\exp\Big\{-\frac{x^2n^{-1}\lambda^2}{8}\Big\} + 4\Big(\frac{1}{4(\beta x^2 n^{-1}\lambda^2+1)}\Big)^{1/(12\beta)}\}dx \\
=: &\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p}h(n)\int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} (I_1 + I_2 + I_3)dx.
\end{aligned}$$

对于 I_1 以及 $1 \leqslant p < 2, r \geqslant p$, 注意到 $E|\varepsilon_1|^r h(|\varepsilon_1|^p) < \infty$, 那么由 (2.2.10),

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p}h(n)\int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} I_1 \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \quad 2\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p}h(n)\int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} P\{|a_{ni}\varepsilon_i| > \beta x\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \quad C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p}h(n)\int_{\beta\epsilon n^{1/p}}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} P\{|a_{ni}\varepsilon_1| > x\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \quad C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p}h(n)\int_{\beta\epsilon n^{1/p}}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i\in I_{nj}} P\{|\varepsilon_1| \geqslant j^{1/p}x\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \quad C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p}h(n)\int_{\beta\epsilon n^{1/p}}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})\sum_{k\geqslant jx^p} P\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \quad C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p}h(n)\int_{\beta\epsilon n^{1/p}}^{\infty}\sum_{k=[x^p]}^{\infty}\sum_{j=1}^{[k/x^p]}(\sharp I_{nj}) P\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \quad C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p}h(n)\int_{\beta\epsilon n^{1/p}}^{\infty}\sum_{k=[x^p]}^{\infty} n(\frac{k}{x^p}+1)^{1/p} P\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \quad C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-1-1/p}h(n)\int_{\beta\epsilon n^{1/p}}^{\infty}\sum_{k=[x^p]}^{\infty} k^{1/p}x^{-1} P\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \quad C\int_1^{\infty} t^{r/p-1-1/p}h(t)\int_{\beta\epsilon t^{1/p}}^{\infty}\sum_{k=[x^p]}^{\infty} k^{1/p}x^{-1} P\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

令 $y=\beta\epsilon t^{1/p}$

$$\leqslant \quad C\int_1^{\infty} y^{r-2}h(y^p)\int_{y}^{\infty}\sum_{k=[x^p]}^{\infty} k^{1/p}x^{-1} P\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \quad C\int_1^\infty (\int_1^x y^{r-2}h(y^p)\mathrm{d}y)\sum_{k=[x^p]}^\infty k^{1/p}x^{-1}P\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \quad C\int_1^\infty x^{r-2}h(x^p)\sum_{k=[x^p]}^\infty k^{1/p}P\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \quad C\sum_{k=0}^\infty k^{1/p}P\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\int_1^{(k+1)^{1/p}} x^{r-2}h(x^p)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \quad C\sum_{k=0}^\infty k^{1/p}P\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}(k+1)^{(r-1)/p}h(k+1)$$

$$\leqslant \quad C\sum_{k=0}^\infty (k+1)^{r/p}h(k+1)P\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}$$

$$\leqslant \quad CE|\varepsilon_1|^r h(|\varepsilon_1|^p)+1<\infty.$$

现在来估计 I_2, 对 $r>1+p/2$, 有

$$\sum_{n=1}^\infty n^{r/p-2-1/p}h(n)\int_{\epsilon n^{1/p}}^\infty I_2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \quad 4\int_1^\infty y^{r/p-2-1/p}h(y)\int_{\epsilon y^{1/p}}^\infty \exp\Big\{-\frac{x^2y^{-1}\lambda^2}{8}\Big\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad 令\ t=x^2y^{-1}$$

$$\leqslant \quad C\int_1^\infty y^{r/p-2-1/p+1/2}h(y)\int_{\epsilon^2 y^{2/p-1}}^\infty t^{-1/2}\exp\Big\{-\frac{t\lambda^2}{8}\Big\}\mathrm{d}t\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \quad C\int_{\epsilon^2}^\infty \Big(\int_1^{(t/\epsilon^2)^{p/(2-p)}} y^{r/p-2-1/p+1/2}h(y)\mathrm{d}y\Big)t^{-1/2}\exp\Big\{-\frac{t\lambda^2}{8}\Big\}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \quad C(r/p-1/2-1/p)^{-1}\int_{\epsilon^2}^\infty t^{(r-2)/(2-p)}h(t^{p/(2-p)})\exp\Big\{-\frac{t\lambda^2}{8}\Big\}\mathrm{d}t<\infty.$$

对于 I_3, 在假设 $r>1+p/2$ 下有 $\dfrac{2-p}{12(r-p)}<\dfrac{1}{6}$, 因此我们选取 β 满足 $0<\beta<$

$\dfrac{2-p}{12(r-p)}$, 那么

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p}h(n)\int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} I_3 \mathrm{d}x \\
\leqslant\ & 4\int_{1}^{\infty} y^{r/p-2-1/p}h(y)\int_{\epsilon y^{1/p}}^{\infty}\left(\frac{1}{4(\beta x^2y^{-1}\lambda^2+1)}\right)^{1/(12\beta)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
\leqslant\ & C\int_{1}^{\infty} y^{r/p-2-1/p}h(y)\int_{\epsilon y^{1/p}}^{\infty}\left(\frac{y}{4\beta x^2\lambda^2}\right)^{1/(12\beta)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
\leqslant\ & C\int_{1}^{\infty} y^{r/p-2-1/p+1/(12\beta)}h(y)\int_{\epsilon y^{1/p}}^{\infty} x^{-1/(6\beta)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
\leqslant\ & C\int_{1}^{\infty} y^{r/p-2-1/p+1/(12\beta)-1/(6\beta p)+1/p}h(y)\mathrm{d}y \\
\leqslant\ & C\int_{1}^{\infty} y^{\frac{r-2p}{p}-\frac{2-p}{12\beta p}}h(y)\mathrm{d}y<\infty.
\end{aligned}$$

这样对 $1\leqslant p<2$ 及 $r>1+p/2$, 最后得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p}h(n)E\{|S_n|-\epsilon n^{1/p}\}_{+}<\infty.$$

第三章　由 I.I.D. 序列产生的线性过程关于矩的精确渐近性

第一节　引言及引理

假设 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为 i.i.d. 的双测无穷随机变量序列，均值为零，方差有限. 线性过程 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 定义如 (2.1.1), 其中 $\{a_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一绝对可和的实数序列.

在第二章的第二节以及第三节中，我们已经分别讨论了线性过程 (2.1.1) 关于完全收敛性和重对数律方面的精确渐近结果.

另一方面，矩完全收敛性问题是由 Chow (1988) 提出的，并讨论了 *i.i.d.* 随机变量序列的矩完全收敛性 (见第二章定理 2.E). 王定成和苏淳 (2002) 讨论了 B 值独立同分布随机变元序列的矩完全收敛性. 而蒋烨博士论文 (2004) 则讨论了 *i.i.d.* 随机变量序列关于矩的完全收敛及重对数律方面的精确渐近性质.

本章的主要目的就是为了证明矩形式的精确渐近结果对线性过程也同样成

立. 第二节中我们得到了矩形式完全收敛的精确渐近结果. 第三节则得到了关于矩的重对数律的精确渐近结果.

下面这个引理是关于线性过程的中心极限定理 (CLT).

引理 3.1.1 *假设 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为满足 $E\varepsilon_1 = 0$ 及 $E\varepsilon_1^2 = \sigma^2$ 的 i.i.d. 随机变量序列. $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 定义如 (2.1.1), 其中 $\{a_i; -\infty < i < \infty\}$ 为实数序列满足 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty$. 那么线性过程 $\{X_k\}$ 服从 CLT, 即,*

$$\frac{S_n}{\tau\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1), \quad \text{其中} \quad \tau = \sigma \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i.$$

证明 由 Yang (1996) 的定理 3.1, 马上可得此引理.

以下引理是关于线性过程 Berry-Esseen 形式的不等式. 参见 Hall (1992).

引理 3.1.2 *假设 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 定义如 (2.1.1), 其中 $\{a_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一实数序列满足 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty$ 以及 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为满足 $E\varepsilon_1 = 0$ 及 $E\varepsilon_1^2 < \infty$ 的 i.i.d. 随机变量序列. 假设 $E|\varepsilon_1|^3 < \infty$, 那么*

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |P(S_n < \tau x\sqrt{n}) - P(N < x)| \leqslant Cn^{-1/2}E|\varepsilon_1|^3. \tag{3.1.1}$$

注 3.1.1 *从 (3.1.1), 马上可得*

$$\sup_{0 < x < \infty} |P(|S_n| \geqslant \tau x\sqrt{n}) - P(|N| \geqslant x)| \leqslant Cn^{-1/2}E|\varepsilon_1|^3. \tag{3.1.2}$$

下面这个引理非常有用.

引理 3.1.3 令 $\{X_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 为满足均值为零，二阶矩有限的 *i.i.d* 随机变量序列，且存在 $d \geqslant 2$，满足 $E|X_1|^d < \infty$. 令 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 及 $B_n = \sum_{i=1}^{n} EX_i^2$. 那么对所有的 $x > 0$,

$$P(|S_n| \geqslant x) \leqslant 2(1+2/d)^d \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^d / x^d + 2\exp\{-\frac{2e^{-d}x^2}{(d+2)B_n}\}. \tag{3.1.3}$$

引理 3.1.4 设 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 定义如 *(2.1.1)*, 其中 $\{a_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一实数序列满足 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty$ 以及 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一独立同分布随机变量序列满足 $E\varepsilon_1 = 0$ 及 $E\varepsilon_1^2 < \infty$. 假设 $E|\varepsilon_1|^r < \infty, r > 2$, 则对 $p \geqslant 2$, 有

$$E|\sum_{k=1}^{n} X_k|^p \leqslant Cn^{p/2}. \tag{3.1.4}$$

证明 令 $\widetilde{X_t} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_t$, $\widetilde{S_n} = \sum_{t=1}^{n} \widetilde{X_t}$, $S_n' = \sum_{t=1}^{n} X_t = \sum_{t=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$, 有

$$\begin{aligned}
\widetilde{S_k} &= \sum_{t=1}^{k} \widetilde{X_t} = \sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=0}^{\infty} a_j)\varepsilon_t \\
&= \sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=0}^{k-t} a_j)\varepsilon_t + \sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=k-t+1}^{\infty} a_j)\varepsilon_t \\
&= \sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=0}^{t-1} a_j\varepsilon_{t-j}) + \sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=k-t+1}^{\infty} a_j)\varepsilon_t.
\end{aligned}$$

这样 $\widetilde{S_k} - S_k' = -\sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=t}^{\infty} a_j\varepsilon_{t-j}) + \sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=k-t+1}^{\infty} a_j)\varepsilon_t$ 那么由 C_r 不等式，对于

$p \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^{p/2}} E \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\widetilde{S_k} - S_k'|^p \\
= \ & \frac{1}{n^{p/2}} E \max_{1\leqslant k\leqslant n'} |\sum_{t=1}^{k} (\sum_{j=k-t+1}^{\infty} a_j)\varepsilon_t - \sum_{t=1}^{k} (\sum_{j=t}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j})|^p \\
\leqslant \ & C \frac{1}{n^{p/2}} (E \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\sum_{t=1}^{k} (\sum_{j=k-t+1}^{\infty} a_j)\varepsilon_t|^p + E \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\sum_{t=1}^{k} (\sum_{j=t}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j})|^p) \\
\triangleq \ & C \frac{1}{n^{p/2}} (E \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\mathrm{I}|^p + E \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\mathrm{II}|^p).
\end{aligned}$$

首先，由 Minkowski 不等式以及控制收敛定理，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{p/2}} E \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\mathrm{II}|^p &= \frac{1}{n^{p/2}} E \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\sum_{t=1}^{k} \sum_{j=t}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}|^p \\
&= \frac{1}{n^{p/2}} E \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{j\wedge k} a_j \varepsilon_{t-j}|^p \\
&\leqslant \frac{1}{n^{p/2}} (\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \{E \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\sum_{t=1}^{j\wedge k} \varepsilon_{t-j}|^p\}^{\frac{1}{p}})^p \\
&\leqslant \frac{1}{n^{p/2}} \{\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| C^{\frac{1}{p}} (j\wedge n)^{\frac{1}{p}}\}^p \\
&\leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| ((j\wedge n)/n)^{\frac{1}{p}}\Big)^p = o(1)
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

然后，将 I 分成两部分， $\mathrm{I}=\mathrm{I}_{k_1}+\mathrm{I}_{k_2}$, 其中

$$\mathrm{I}_{k_1} = a_1\varepsilon_1 + a_2(\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}) + \cdots + a_k(\varepsilon_k + \cdots + \varepsilon_1)$$

以及

$$\mathrm{I}_{k_2} = (a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots)(\varepsilon_k + \cdots + \varepsilon_1).$$

令 $\{p_n\}$ 为满足当 $n\to\infty$ 时, $p_n\to\infty$ 以及 $p_n/n\to 0$ 的正整数序列. 那么,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{p/2}}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{k_2}|^p &\leqslant \Big(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|\Big)^p\frac{1}{n^{p/2}}E\max_{1\leqslant k\leqslant p_n}|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k|^p\\ &\quad+\Big(\sum_{j>p_n}|a_j|\Big)^p\frac{1}{n^{p/2}}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k|^p\\ &\leqslant C\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|\Big)^p\Big(\frac{p_n}{n}\Big)^{p/2}+C\Big(\sum_{j>p_n}|a_j|\Big)^p=o(1).\end{aligned}$$

对每个 $1\leqslant m<k$, 定义 $\mathrm{I}_{k_1,m}=a_1\varepsilon_1+a_2(\varepsilon_k+\varepsilon_{k-1})+\cdots+a_m(\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_{k-m+1})$, 我们有,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{p/2}}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{\mathrm{k}_1,\mathrm{m}}|^p &\leqslant \frac{1}{n^{p/2}}\Big(\sum_{j=1}^{m}|a_j|\Big)^pE\max_{m\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_{k-m+1}|^p\\ &\leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{m}|a_j|\Big)^p\Big(\frac{m}{n}\Big)^{p/2}\end{aligned}\tag{3.1.6}$$

以及

$$\begin{aligned}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{k_{1,m}}-\mathrm{I}_{k_1}| &= \max_{m<k\leqslant n}\Big|\sum_{j=m+1}^{k}a_j(\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_{k-j+1})\Big|\\ &\leqslant \max_{m<k\leqslant n}\Big(\sum_{j=m+1}^{k}|a_j|\max_{m<j\leqslant k}|\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_{k-j+1}|\Big)\\ &\leqslant \max_{m<k\leqslant n}\Big(\sum_{j=m+1}^{k}|a_j|\max_{m<j\leqslant k}|\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_1|\Big)\\ &\quad+\Big|\max_{m<k\leqslant n}\Big(\sum_{j=m+1}^{k}a_j\Big)\max_{m<j\leqslant k}(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-j})\Big|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \ (\sum_{j=m+1}^{n}|a_j|)\max_{m<k\leqslant n}|\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_1| \\
&\quad +(\sum_{j=m+1}^{n}|a_j|)\max_{m<k\leqslant n}\max_{m<j\leqslant k}|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-j}| \\
&\leqslant \ 2(\sum_{j=m+1}^{n}|a_j|)\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_1|.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{p/2}}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{k_{1,m}}-\mathrm{I}_{k_1}|^p &\leqslant 4\frac{1}{n^{p/2}}(\sum_{j=m+1}^{n}a_j)^pE\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_1|^p \\
&\leqslant 4C(\sum_{j=m+1}^{n}a_j)^p. \qquad (3.1.7)
\end{aligned}$$

令 $m=[\sqrt{n}]$, 由 (3.1.6) 和 (3.1.7), 可以得到 $\frac{1}{n^{p/2}}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{k_1}|^p=o(1)$. 那么

$$\frac{1}{n^{p/2}}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}|^p\leqslant C\frac{1}{n^{p/2}}(E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{k_1}|^p+E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{k_2}|^p)=o(1). \qquad (3.1.8)$$

再由 (3.1.5) 和 (3.1.8), 我们可得

$$\frac{1}{n^{p/2}}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\widetilde{S_k}-S_k^{'}|^p\to 0 \quad (n\to\infty). \qquad (3.1.9)$$

因此得到

$$E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\widetilde{S_k}|^p=E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|(\sum_{j=0}^{\infty}a_j)\varepsilon_t|^p\leqslant C(\sum_{j=0}^{\infty}a_j)^pn^{p/2}\leqslant Cn^{p/2}. \qquad (3.1.10)$$

根据 (3.1.9) 和 (3.1.10), 证得 $E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k^{'}|^p\leqslant Cn^{p/2}$.
最后得 $E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|^p\leqslant Cn^{p/2}$.

第二节 由 I.I.D. 序列产生的线性过程矩的精确完全收敛性

§3.2.1 介绍和主要结果

记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k, n\geqslant 1$, 其中 $\{X_k;k\geqslant 1\}$ 定义如 (2.1.1). 下面为我们的主要结果.

定理 3.2.1 假设 $\{X_k;k\geqslant 1\}$ 定义如 (2.1.1), 其中 $\{a_i;-\infty<i<\infty\}$ 为一实数序列满足 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_i|<\infty$ 以及 $\{\varepsilon_i;-\infty<i<\infty\}$ 为满足 $E\varepsilon_1=0, E\varepsilon_1^2<\infty$ 的 *i.i.d.* 随机变量序列. 假设 $E|\varepsilon_1|^3<\infty$, 则对 $1<p<2$, $r>1+p/2$, 若 $E|\varepsilon_1|^r<\infty$, 那么

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1}\sum_{n=1}^{\infty}n^{r/p-2-1/p}E\{|S_n|-\epsilon n^{1/p}\}_+$$

$$=\frac{p(2-p)}{(r-p)(2r-p-2)}E|Z|^{2(r-p)/(2-p)},\tag{3.2.1}$$

其中 Z 服从均值为 0, 方差为 $\tau^2=\sigma^2\cdot(\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_i)^2$ 的正态分布.

注 3.2.1 令 $a_{i+k}=1, i=k; a_{i+k}=0, i\neq k, 1\leqslant k\leqslant n$, 那么 $X_k=\varepsilon_k$,

$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k$. 因此 *(3.2.1)* 在适当的条件下，当 $\{X_k;k\geqslant 1\}$ 为 *i.i.d.* 随机变量时同样成立.

§3.2.2 定理的证明

不失一般性，下文中我们假设 $\tau=1$. 令 $a(\varepsilon):=\varepsilon^{-2p/(2-p)}$. 定理 3.2.1 可由以下几个命题得证.

命题 3.2.1 若 $1<p<2$, $r>1+p/2$, 则有

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{\frac{2(r-p)}{2-p}-1}\sum_{n=1}^{\infty}n^{r/p-2-1/p+1/2}E\{|N|-\varepsilon n^{1/p-1/2}\}_+$$

$$=\frac{p(2-p)}{(r-p)(2r-p-2)}E|N|^{\frac{2(r-p)}{2-p}}. \tag{3.2.2}$$

证明 由 $r>1+p/2$, 可得

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{\frac{2(r-p)}{2-p}-1}\sum_{n=1}^{\infty}n^{r/p-2-1/p+1/2}\mathsf{E}\{|N|-\varepsilon n^{1/p-1/2}\}_+$$

$$=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{\frac{2(r-p)}{2-p}-1}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}\int_{\varepsilon n^{1/p-1/2}}^{\infty}\mathsf{P}(|N|\geqslant t)\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{\frac{2(r-p)}{2-p}-1}\int_{1}^{\infty}x^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}\int_{\varepsilon x^{1/p-1/2}}^{\infty}\mathsf{P}\{|N|\geqslant t\}\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2p}{2-p}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}y^{\frac{2(r-p)}{2-p}-2}\int_{y}^{\infty}\mathsf{P}\{|N|\geqslant t\}\mathrm{d}t\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2p}{2-p}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\mathsf{P}\{|N|\geqslant t\}\int_{\varepsilon}^{t}y^{\frac{2(r-p)}{2-p}-2}\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2p}{2-p}\left(\frac{2(r-p)}{2-p}-1\right)^{-1}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\left(t^{\frac{2(r-p)}{2-p}-1}-\varepsilon^{\frac{2(r-p)}{2-p}-1}\right)\mathsf{P}\{|N|\geqslant t\}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2p}{2r-2-p}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}t^{\frac{2(r-p)}{2-p}-1}\mathsf{P}\{|N|\geqslant t\}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2-p}{2(r-p)}\cdot\frac{2p}{2r-2-p}\mathsf{E}|N|^{\frac{2(r-p)}{2-p}}$$

$$= \frac{p}{r-p}\cdot\frac{2-p}{2r-2-p}\mathsf{E}|N|^{\frac{2(r-p)}{2-p}}. \tag{3.2.3}$$

命题得证.

命题 3.2.2 若 $1<p<2$, $r>1+p/2$, $E|X|^3<\infty$ 及 $M>2$, 我们有

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{\frac{2(r-p)}{2-p}-1}\sum_{n\leqslant a(\varepsilon)M}n^{r/p-2-1/p}$$

$$\left|E\{|S_n|-\varepsilon n^{1/p}\}_+-n^{1/2}E\{|N|-\varepsilon n^{1/p-1/2}\}_+\right|=0. \tag{3.2.4}$$

证明 容易看到

$$\epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1}\sum_{n\leqslant a(\epsilon)M}n^{r/p-2-1/p}\big|E\{|S_n|-\epsilon n^{1/p}\}_+$$

$$-n^{1/2}E\{|N|-\epsilon n^{1/p-1/2}\}_+\big|$$

$$\leqslant \epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1}\sum_{n\leqslant a(\epsilon)M}n^{r/p-2-1/p}\Big|\int_0^{n^{1/p}}P\{|S_n|\geqslant\epsilon n^{1/p}+x\}\mathrm{d}x$$

$$+\int_{n^{1/p}}^{\infty}P\{|S_n|\geqslant\epsilon n^{1/p}+x\}\mathrm{d}x-n^{1/2}\Big(\int_0^{n^{1/p-1/2}}P\{|N|\geqslant\epsilon n^{1/p-1/2}+x\}\mathrm{d}x$$

$$+\int_{n^{1/p-1/2}}^{\infty}P\{|N|\geqslant\epsilon n^{1/p-1/2}+x\}\mathrm{d}x\Big)\Big|$$

$$\leqslant \epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1} \sum_{n \leqslant a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p+1/2}$$

$$\Big(\int_0^{n^{1/p-1/2}} |P\{|S_n|/\sqrt{n} \geqslant \epsilon n^{1/p-1/2}+x\} - P\{|N| \geqslant \epsilon n^{1/p-1/2}+x\}|\mathrm{d}x$$

$$+\int_{n^{1/p-1/2}}^{\infty} |P\{|S_n|/\sqrt{n} \geqslant \epsilon n^{1/p-1/2}+x\}\mathrm{d}x - P\{|N| \geqslant \epsilon n^{1/p-1/2}+x\}|\mathrm{d}x\Big)$$

$$\leqslant \epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1} \sum_{n \leqslant a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p+1/2}(\Delta_{n1}+\Delta_{n2}).$$

由 (3.1.2) 及 $p > 1$,

$$\begin{aligned}
\Delta_{n1} &= \int_0^{n^{1/p-1/2}} |P\{|S_n|/\sqrt{n} \geqslant \epsilon n^{1/p-1/2}+x\} - P\{|N| \geqslant \epsilon n^{1/p-1/2}+x\}|\mathrm{d}x \\
&\leqslant n^{1/p-1/2} \sup_{0<x<\infty} |P\{|S_n|/\sqrt{n} \geqslant x\} - P\{|N| \geqslant x\}| \\
&\leqslant C n^{1/p-1/2} n^{-1/2} = C n^{-1+1/p} \to 0, \quad \text{当} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

由引理 3.1.4, 对 $\alpha \geqslant 2$, $\sup_n \mathsf{E}|S_n/\sqrt{n}|^\alpha < \infty$. 再由 Markov 不等式，当 $x \geqslant n^{1/p-1/2}$ 时，有

$$|P(|S_n|/\sqrt{n} \geqslant \epsilon n^{1/p-1/2}+x) - P(|N| \geqslant \epsilon n^{1/p-1/2}+x)| \leqslant C x^{-\alpha}.$$

则

$$\begin{aligned}
\Delta_{n2} &= \int_{n^{1/p-1/2}}^{\infty} |P\{|S_n|/\sqrt{n} \geqslant \epsilon n^{1/p-1/2}+x\}\mathrm{d}x - P\{|N| \geqslant \epsilon n^{1/p-1/2}+x\}|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{n^{1/p-1/2}}^{\infty} C n^{-\alpha}\mathrm{d}x \\
&\leqslant C n^{(1/p-1/2)(-\alpha+1)} \to 0, \quad \text{当} \ n \to \infty, \quad \text{对于} \ 1<\alpha<2, \ 1<p<2.
\end{aligned}$$

定义 $\Delta_n = \Delta_{n1} + \Delta_{n2}$. 那么有

$$m^{-r/p+1/p+1/2} \sum_{n=1}^{m} n^{r/p-2-1/p+1/2} \Delta_n \to 0, \quad \text{当} \ m \to \infty.$$

因此得到

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1}\sum_{n\leqslant a(\epsilon)M}n^{r/p-2-1/p}\Big|E\{|S_n|-\epsilon n^{1/p}\}_+$$

$$-n^{1/2}E\{|N|-\epsilon n^{1/p-1/2}\}_+\Big|$$

$$=\lim_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1}\sum_{n\leqslant a(\epsilon)M}n^{r/p-2-1/p+1/2}\Delta_n$$

$$\leqslant\lim_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1}[a(\epsilon)M]^{r/p-1/2-1/p}[a(\epsilon)M]^{-r/p+1/2+1/p}$$

$$\sum_{n\leqslant a(\epsilon)M}n^{r/p-2-1/p+1/2}\Delta_n$$

$$=0.$$

命题 3.2.3 假设 $E|\varepsilon_1|^r<\infty$. 对 $1<p<2$ 及 $r>1+p/2$, 我们有

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1}\sum_{n>a(\epsilon)M}n^{r/p-2-1/p}$$

$$\Big|E\{|S_n|-\epsilon n^{1/p}\}_+-n^{1/2}E\{|N|-\epsilon n^{1/p-1/2}\}_+\Big|=0.\quad(3.2.5)$$

证明 只要证明对充分小的 $0<\epsilon<1$, 一致成立

$$\lim_{M\to\infty}\epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1}\sum_{n>a(\epsilon)M}n^{r/p-2-1/p}n^{1/2}E\{|N|-\epsilon n^{1/p-1/2}\}_+=0\quad(3.2.6)$$

以及

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1}\sum_{n>a(\epsilon)M}n^{r/p-2-1/p}E\{|S_n|-\epsilon n^{1/p}\}_+=0.\quad(3.2.7)$$

注意到对 $M>2$ 及 $0<\epsilon<1$, 有 $a(\epsilon)M-1\geqslant a(\epsilon)M/2$. 我们马上有当

$M \to \infty$ 时，对 $1 < p < 2$, $r > 1 + p/2$ 以及 $0 < \epsilon < 1$ 一致成立

$$
\begin{aligned}
&\epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1} \sum_{n > a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} n^{1/2} E\{|N| - \epsilon n^{1/p-1/2}\}_+ \\
\leqslant\ & \epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1} \int_{a(\epsilon)M-1}^{\infty} y^{r/p-2-1/p+1/2} \int_{\epsilon y^{1/p-1/2}}^{\infty} P\{|N| \geqslant x\} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
\leqslant\ & \epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1} \int_{a(\epsilon)M/2}^{\infty} y^{r/p-2-1/p+1/2} \int_{\epsilon y^{1/p-1/2}}^{\infty} P\{|N| \geqslant x\} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
=\ & \frac{2p}{2-p} \int_{(M/2)^{(2-p)/2p}}^{\infty} t^{2(r-p)/(2-p)-2} \int_{t}^{\infty} P\{|N| \geqslant x\} \mathrm{d}x \mathrm{d}t \quad 令\ t = \epsilon y^{1/p-1/2} \\
=\ & \frac{2p}{2-p} \int_{(M/2)^{(2-p)/2p}}^{\infty} P\{|N| \geqslant x\} \int_{(M/2)^{(2-p)/2p}}^{x} t^{2(r-p)/(2-p)-2} \mathrm{d}t \mathrm{d}x \\
=\ & \frac{2p}{2-p} \left(\frac{2r-2-p}{2-p} - 1\right)^{-1} \int_{(M/2)^{(2-p)/2p}}^{\infty} x^{2(r-p)/(2-p)-1} P\{|N| \geqslant x\} \mathrm{d}x \\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

这样 (3.2.6) 得证.

接下来，注意到

$$
\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{k+i} \varepsilon_i,
$$

记 $a_{ni} = \sum_{k=1}^{n} a_{k+i}$. 那么

$$
\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni} \varepsilon_i =: \sum_{i=-\infty}^{\infty} Y_i.
$$

对 $1<p<2$ 及 $1+p/2<r<2$, 注意到 $E|\varepsilon_1|^2<\infty$, 则由 (2.2.9), 我们有

$$
\begin{aligned}
I &=: \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} E\{|\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}\varepsilon_i| - \epsilon n^{1/p}\}_+ \\
&= \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} P\{|\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}\varepsilon_i| \geqslant x\}\mathrm{d}x \\
&\leqslant C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} \frac{\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}^2 E\varepsilon_i^2}{x^2}\mathrm{d}x \\
&\leqslant C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-1-1/p}(\epsilon n^{1/p})^{-1} \\
&= C \sum_{n>a(\epsilon)M} \epsilon^{-1} n^{r/p-1-2/p} \leqslant C\epsilon^{-1}(a(\epsilon)M)^{r/p-2/p} \\
&= C\epsilon^{-2(r-p)/(2-p)+1} M^{(r-2)/p}.
\end{aligned}
$$

因此对 $1<p<2$ 及 $1+p/2<r<2$, 我们得到

$$
\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1} I \leqslant \lim_{M\to\infty} CM^{(r-2)/p} = 0. \tag{3.2.8}
$$

对 $1<p<2$ 及 $r\geqslant 2$, 定义

$$
Y_i^{'} = Y_i I\{|Y_i| \geqslant x\} - EY_i I\{|Y_i| \geqslant x\}, \quad Y_i^{''} = Y_i - Y_i^{'},
$$

那么

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} E\{|S_n| - \epsilon n^{1/p}\}_+ \\
= &\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} P\{|S_n| \geqslant x\}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} P\{|\sum_{i=-\infty}^{\infty} Y_i' + \sum_{i=-\infty}^{\infty} Y_i''| \geqslant x\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} \Big(P\{|\sum_{i=-\infty}^{\infty} Y_i'| \geqslant x/2\} + P\{|\sum_{i=-\infty}^{\infty} Y_i''| \geqslant x/2\}\Big)\mathrm{d}x$$

$$=: \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p}(I_1 + I_2).$$

利用引理 3.1.3, 有

$$\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} I_1$$

$$\leqslant C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty}$$

$$\cdot\Big(x^{-q} \sum_{i=-\infty}^{\infty} E|a_{ni}\varepsilon_i|^q I\{|a_{ni}\varepsilon_i| \geqslant x\} + \exp\{-Cx^2 n^{-1}\}\Big)\mathrm{d}x$$

$$=: \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p}(I_3 + I_4).$$

首先对于 I_3 以及 $r \geqslant 2$, 由 (2.2.10), 我们有

$$\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} I_3$$

$$= C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} x^{-q} \sum_{i=-\infty}^{\infty} E|a_{ni}\varepsilon_i|^q I\{|a_{ni}\varepsilon_i| \geqslant x\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} x^{-q} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i\in I_{nj}} j^{-q/p} E|\varepsilon_1|^q I\{|\varepsilon_1| \geqslant xj^{1/p}\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \ C\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p}\int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} x^{-q}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}$$

$$\sum_{k\geqslant jx^p} E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \ C\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p}\int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} x^{-q}\sum_{k=[x^p]}^{\infty}$$

$$\sum_{j=1}^{[k/x^p]}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \ C\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p}\int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} x^{-q}\sum_{k=[x^p]}^{\infty}$$

$$\sum_{j=1}^{[k/x^p]}(\sharp I_{nj})E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \ C\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p}\int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} x^{-q}\sum_{k=[x^p]}^{\infty}$$

$$n(\frac{k}{x^p}+1)^{1/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \ C\int_{a(\epsilon)M/2}^{\infty} y^{r/p-1-1/p}\int_{\epsilon y^{1/p}}^{\infty} x^{-q-1}\sum_{k=[x^p]}^{\infty}k^{1/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $t=\epsilon y^{1/p}$

$$\leqslant \ C\epsilon^{-r+1}\int_{\epsilon(a(\epsilon)M/2)^{1/p}}^{\infty} t^{r-2}\int_{t}^{\infty} x^{-q-1}$$

$$\sum_{k=[x^p]}^{\infty}k^{1/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\epsilon^{-r+1}\int_{2^{-1/p}\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}}^{\infty}\Big(\int_{2^{-1/p}\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}}^{x}t^{r-2}\mathrm{d}t\Big)x^{-q-1}\\
&\quad\sum_{k=[x^p]}^{\infty}k^{1/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\epsilon^{-r+1}\int_{2^{-1/p}\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}}^{\infty}x^{r-2-q}\sum_{k=[x^p]}^{\infty}k^{1/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\epsilon^{-r+1}\sum_{k=[1/2\epsilon^{-p^2/(2-p)}M]}^{\infty}k^{1/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\\
&\quad\cdot\int_{2^{-1/p}\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}}^{(k+1)^{1/p}}x^{r-2-q}\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

其中令 $q=2$, 定义 $\Lambda=:\int_{2^{-1/p}\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}}^{(k+1)^{1/p}}x^{r-2-q}\mathrm{d}x$. 当 $r>3$ 时，容易得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n>a(\epsilon)M}n^{r/p-2-1/p}I_3\\
&\leqslant C\epsilon^{-r+1}\sum_{k=[1/2\epsilon^{-p^2/(2-p)}M]}^{\infty}k^{(r-2)/p}E|\varepsilon_1|^2 I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-r+1}E|\varepsilon_1|^r I\{|\varepsilon_1|\geqslant 2^{-1/p}\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}\}.
\end{aligned}
$$

由 $E|\varepsilon_1|^r<\infty$, 则对 $r>3$

$$
\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1}\sum_{n>a(\epsilon)M}n^{r/p-2-1/p}I_3\leqslant C\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{p(r-2)/(2-p)}=0. \tag{3.2.9}
$$

当 $2 \leqslant r \leqslant 3$ 的情况，我们有 $\Lambda \leqslant C\epsilon^{-p(r-3)/(2-p)}M^{(r-3)/p}$, 那么

$$\begin{aligned}
&\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} I_3 \\
\leqslant\ & C\epsilon^{-r+1}\epsilon^{-p(r-3)/(2-p)}M^{(r-3)/p} \\
&\sum_{k=[1/2\epsilon^{-p^2/(2-p)}M]}^{\infty} k^{1/p} E|\varepsilon_1|^2 I\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\} \\
\leqslant\ & C\epsilon^{-r+1}\epsilon^{-p(r-3)/(2-p)}M^{(r-3)/p} E|\varepsilon_1|^3 I\{|\varepsilon_1| \geqslant 2^{-1/p}\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}\}.
\end{aligned}$$

由 $E|\varepsilon_1|^3 < \infty$, 则对 $2 \leqslant r \leqslant 3$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1} \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} I_3 \\
\leqslant\ & C \lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{p(r-2)/(2-p)}\epsilon^{-p(r-3)/(2-p)}M^{(r-3)/p} = 0. \qquad (3.2.10)
\end{aligned}$$

因此，对 $1 < p < 2$ 及 $r \geqslant 2$, 根据 (3.2.9) 以及 (3.2.10), 立即得到

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1} \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} I_3 = 0. \qquad (3.2.11)$$

现在来估计 I_4, 对 $r > 1 + p/2$, 由 $r/p - 1/2 - 1/p = \dfrac{2r-p-2}{2p} > 0$, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} I_4 \\
=\ & C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} \exp\{-Cx^2y^{-1}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
\leqslant\ & C \int_{a(\epsilon)M/2}^{\infty} y^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon y^{1/p}}^{\infty} \exp\{-Cx^2y^{-1}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{令 } t = x^2y^{-1} \\
\leqslant\ & C \int_{a(\epsilon)M/2}^{\infty} y^{r/p-2-1/p+1/2} \int_{\epsilon^2 y^{2/p-1}}^{\infty} t^{-1/2}\exp\{-Ct\}\mathrm{d}t\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$\leqslant \quad C\int_{(M/2)^{(2-p)/p}}^{\infty}\Big(\int_{a(\epsilon)M/2}^{(t/\epsilon^2)^{p/(2-p)}} y^{r/p-2-1/p+1/2}\mathrm{d}y\Big)t^{-1/2}\exp\{-Ct\}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \quad C(r/p-1/2-1/p)^{-1}\epsilon^{-\frac{2(r-p)}{2-p}+1}\int_{(M/2)^{(2-p)/p}}^{\infty} t^{(r-2)/(2-p)}\exp\{-Ct\}\mathrm{d}t.$$

那么对 $1<p<2$ 及 $r>1+p/2$,

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1}\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p}I_4$$

$$\leqslant \quad C\lim_{M\to\infty}\int_{(M/2)^{(2-p)/p}}^{\infty} t^{(r-2)/(2-p)}\exp\{-Ct\}\mathrm{d}t=0. \tag{3.2.12}$$

这样，综合 (3.2.11) 以及 (3.2.12), 对 $1<p<2$ 及 $r\geqslant 2$, 我们有

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1}\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p}I_1=0. \tag{3.2.13}$$

然后对于 I_2, 与 I_1 相似，根据引理 3.1.3, 有

$$\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p}I_2$$

$$\leqslant \quad C\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p}\int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty}$$

$$\Big(x^{-q}\sum_{i=-\infty}^{\infty}E|a_{ni}\varepsilon_i|^q I\{|a_{ni}\varepsilon_i|<x\}+\exp\{-Cx^2n^{-1}\}\Big)\mathrm{d}x$$

$$=:\quad \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p}(I_5+I_4).$$

那么对 $r \geqslant 2$, 利用 (2.2.10), 可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} I_5 \\
= \;& C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} x^{-q} \sum_{i=-\infty}^{\infty} E|a_{ni}\varepsilon_i|^q I\{|a_{ni}\varepsilon_i| < x\} \mathrm{d}x \\
\leqslant \;& C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} x^{-q} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i\in I_{nj}} j^{-q/p} E|\varepsilon_1|^q I\{|\varepsilon_1| < x(j+1)^{1/p}\} \mathrm{d}x \\
\leqslant \;& C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} x^{-q} \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj}) j^{-q/p} \\
& \sum_{0\leqslant k<(j+1)x^p} E|\varepsilon_1|^q I\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\} \mathrm{d}x \\
\leqslant \;& C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} x^{-q} \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj}) j^{-q/p} \\
& \sum_{k=0}^{[2x^p]} E|\varepsilon_1|^q I\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\} \mathrm{d}x \\
& + C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} x^{-q} \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj}) j^{-q/p} \\
& \sum_{k=[2x^p]+1}^{[(j+1)x^p]} E|\varepsilon_1|^q I\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\} \mathrm{d}x \\
=: \;& I_6 + I_7.
\end{aligned}
$$

那么对 I_6, 利用 (2.2.15) 并选取 $q > r$,

$$
I_6 \leqslant C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} x^{-q} n \sum_{k=0}^{[2x^p]} E|\varepsilon_1|^q I\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\} \mathrm{d}x
$$

$$\leqslant \ C\int_{a(\epsilon)M/2}^{\infty} y^{r/p-1-1/p}\int_{\epsilon y^{1/p}}^{\infty} x^{-q}\sum_{k=0}^{[2x^p]} E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $t=\epsilon y^{1/p}$

$$\leqslant \ C\epsilon^{-r+1}\int_{\epsilon(a(\epsilon)M/2)^{1/p}}^{\infty} t^{r-2}\int_{t}^{\infty} x^{-q}\sum_{k=0}^{[2x^p]} E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \ C\epsilon^{-r+1}\int_{2^{-1/p}\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}}^{\infty}\Big(\int_{2^{-1/p}\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}}^{x} t^{r-2}\mathrm{d}t\Big)x^{-q}$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{[2x^p]} E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \ C\epsilon^{-r+1}\int_{2^{-1/p}\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}}^{\infty} x^{r-1-q}\sum_{k=0}^{[2x^p]} E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \ C\epsilon^{-r+1}\sum_{k=[\epsilon^{-p^2/(2-p)}M]}^{\infty} E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\int_{(k/2)^{1/p}}^{\infty} x^{r-1-q}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \ C\epsilon^{-r+1}\sum_{k=[\epsilon^{-p^2/(2-p)}M]}^{\infty} k^{(r-q)/p} E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}$$

$$\leqslant \ C\epsilon^{-r+1}E|\varepsilon_1|^r I\{|\varepsilon_1|\geqslant\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}\}.$$

由 $E|\varepsilon_1|^r<\infty$, 对 $r>2$, 有

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow0}\epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1}\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p}I_6\leqslant C\limsup_{\epsilon\searrow0}\epsilon^{p(r-2)/(2-p)}=0 \tag{3.2.14}$$

及对 $r=2$, 有

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow0}\epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1}\sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p}I_6$$

$$\leqslant \ C\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow0}E|\varepsilon_1|^r I\{|\varepsilon_1|\geqslant\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}\}=0. \tag{3.2.15}$$

对于 I_7, 再利用 (2.2.15), 则有

$$I_7 \leqslant C \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} x^{-q} n \sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} \sum_{j=[k/x^p]-1}^{\infty} (\sharp I_{nj}) j^{-q/p}$$

$$E|\varepsilon_1|^q I\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\} \mathrm{d}x$$

$$\leqslant C \sum_{n>a(\epsilon)M}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} x^{-q} \sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} n(\frac{k}{x^p})^{-(q-1)/p}$$

$$E|\varepsilon_1|^q I\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\} \mathrm{d}x$$

$$\leqslant C \int_{a(\epsilon)M/2}^{\infty} y^{r/p-1-1/p} \int_{\epsilon y^{1/p}}^{\infty} x^{-1} \sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} k^{-(q-1)/p}$$

$$E|\varepsilon_1|^q I\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\epsilon^{-r+1} \int_{\epsilon(a(\epsilon)M/2)^{1/p}}^{\infty} t^{r-2} \int_{t}^{\infty} x^{-1} \sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} k^{-(q-1)/p}$$

$$E|\varepsilon_1|^q I\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\} \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C\epsilon^{-r+1} \int_{2^{-1/p}\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}}^{\infty} \left(\int_{2^{-1/p}\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}}^{x} t^{r-2}\mathrm{d}t\right) x^{-1}$$

$$\sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} k^{-(q-1)/p} E|\varepsilon_1|^q I\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\} \mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\epsilon^{-r+1} \int_{2^{-1/p}\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}}^{\infty} x^{r-2} \sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} k^{-(q-1)/p}$$

$$E|\varepsilon_1|^q I\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\} \mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\epsilon^{-r+1} \sum_{k=[\epsilon^{-p^2/(2-p)}M]}^{\infty} k^{-(q-1)/p} E|\varepsilon_1|^q I\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\}$$

$$\cdot \int_{2^{-1/p}\epsilon^{-p/(2-p)}M^{1/p}}^{(k/2)^{1/p}} x^{r-2}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \quad C\epsilon^{-r+1} \sum_{k=[\epsilon^{-p^2/(2-p)}M]}^{\infty} k^{(r-q)/p} E|\varepsilon_1|^q I\{k \leqslant |\varepsilon_1|^p < k+1\}$$

$$\leqslant \quad C\epsilon^{-r+1} E|\varepsilon_1|^r I\{|\varepsilon_1| \geqslant \epsilon^{-p/(2-p)} M^{1/p}\}.$$

那么与 I_6 相似，对 $r > 2$, 我们有

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1} \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} I_7 \leqslant C \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{p(r-2)/(2-p)} = 0 \tag{3.2.16}$$

及对 $r = 2$, 有

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1} \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} I_7$$

$$\leqslant \quad C \lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} E|\varepsilon_1|^r I\{|\varepsilon_1| \geqslant \epsilon^{-p/(2-p)} M^{1/p}\} = 0. \tag{3.2.17}$$

那么综合 (3.2.14)–(3.2.17), 我们得到对 $1 < p < 2$ 及 $r \geqslant 2$,

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1} \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} I_5 = 0. \tag{3.2.18}$$

最后由 (3.2.12) 及 (3.2.18), 对 $1 < p < 2$ 及 $r \geqslant 2$, 有

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(r-p)/(2-p)-1} \sum_{n>a(\epsilon)M} n^{r/p-2-1/p} I_2 = 0. \tag{3.2.19}$$

因此，综合 (3.2.8), (3.2.13) 以及 (3.2.19), (3.2.7) 证毕.

第三节 由 I.I.D. 序列产生的线性过程矩重对数律的精确渐近性

§3.3.1 介绍和主要结果

上一节讨论了线性过程矩的精确完全收敛性，这一节我们主要讨论线性过程矩重对数律的精确渐近性质．记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, n \geqslant 1$, 其中 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 定义如 (2.1.1)．下面为本节的主要结果．

定理 3.3.1 *假设 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 定义如 (2.1.1), 其中 $\{a_i; -\infty < i < \infty\}$ 为一实数序列满足 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty$ 以及 $\{\varepsilon_i; -\infty < i < \infty\}$ 为满足 $E\varepsilon_1 = 0, E\varepsilon_1^2 < \infty$ 的 i.i.d. 随机变量序列．令 $a_n = O(1/\log\log n)$．假设 $E|\varepsilon_1|^3 < \infty$, 那么对任意的 $\delta > -1$, 若 $E\big[\varepsilon_1^3 (\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big] < \infty$, 我们有*

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon^{2\delta+2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n} E\{|S_n| - (\epsilon + a_n)\tau\sqrt{2n\log\log n}\}_+$$

$$= \frac{\sqrt{2}\tau}{\sqrt{\pi}(\delta+1)(2\delta+3)} \Gamma(\delta+2), \tag{3.3.1}$$

其中 $\tau = \sigma \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i$ 以及 $\Gamma(\cdot)$ 为一 Gamma 函数.

注 3.3.1 令 $a_{i+k}=1, i=k; a_{i+k}=0, i\neq k, 1\leqslant k\leqslant n$, 那么 $X_k=\varepsilon_k$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k$. 因此 (3.3.1) 在适当的条件下，当 $\{X_k;k\geqslant 1\}$ 为 i.i.d. 随机变量时同样成立.

§3.3.2 定理的证明

不失一般性，在下文中我们假设 $\tau=1$. 令 $c(\epsilon):=\exp(\exp\{M/\epsilon^2\})$. 定理 3.3.1 可由以下几个命题得证.

命题 3.3.1 对于 $\delta>-1$, 我们有

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(\delta+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}\mathsf{E}\left\{|N|-(\epsilon+a_n)\sqrt{2\log\log n}\right\}_{+}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\delta+1)(2\delta+3)}\Gamma(\delta+2). \tag{3.3.2}$$

证明 容易得到

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(\delta+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}\mathsf{E}\left\{\beta|N|-\beta\epsilon\sqrt{2\log\log n}\right\}_{+}$$

$$=\quad \beta\lim_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(\delta+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2\log\log n}}^{\infty}\mathsf{P}(|N|\geqslant x)\mathrm{d}x$$

$$=\quad \beta\lim_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(\delta+1)}\int_{e^e}^{\infty}\frac{(\log\log t)^{\delta}}{t\log t}\int_{\epsilon\sqrt{2\log\log t}}^{\infty}\mathsf{P}(|N|\geqslant x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\quad 令 y=\epsilon\sqrt{2\log\log t}$$

$$=\quad \beta\lim_{\epsilon\searrow 0}2^{-\delta}\int_{\epsilon\sqrt{2}}^{\infty}y^{2\delta+1}\int_{y}^{\infty}\mathsf{P}(|N|\geqslant x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.3.3}$$

$$=\quad \beta\lim_{\epsilon\searrow 0}2^{-\delta}\int_{\epsilon\sqrt{2}}^{\infty}\mathsf{P}(|N|\geqslant x)\int_{\epsilon\sqrt{2}}^{x}y^{2\delta+1}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \beta \lim_{\epsilon\searrow 0} \frac{2^{-\delta}}{2(\delta+1)} \int_{\epsilon\sqrt{2}}^{\infty} \mathsf{P}(|N| \geqslant x) x^{2\delta+2} \mathrm{d}x \\
&= \beta \lim_{\epsilon\searrow 0} \frac{2^{-\delta}}{\delta+1} \int_{\epsilon\sqrt{2}}^{\infty} \mathsf{P}(N \geqslant x) x^{2\delta+2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2^{-\delta}\beta}{(\delta+1)(2\delta+3)} \int_0^{\infty} P(N \geqslant x) \mathrm{d}x^{2\delta+3} \\
&= \frac{2^{-\delta}\beta}{(\delta+1)(2\delta+3)} P(N \geqslant x) x^{2\delta+3}\Big|_0^{\infty} + \frac{2^{-\delta}\beta}{(\delta+1)(2\delta+3)} \int_0^{\infty} x^{2\delta+3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{2}\beta}{\sqrt{\pi}(\delta+1)(2\delta+3)} \int_0^{\infty} y^{\delta+1} e^{-y} \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}\beta}{\sqrt{\pi}(\delta+1)(2\delta+3)} \Gamma(\delta+2).
\end{aligned}
$$

那么我们只需要证明

$$
\lim_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(\delta+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}
\left| \mathsf{E}\{|N| - \epsilon\sqrt{2\log\log n}\}_+ - \mathsf{E}\{|N| - (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n}\}_+ \right| = 0. \quad (3.3.4)
$$

显然,

$$
\begin{aligned}
&\left| \mathsf{E}\{|N| - \epsilon\sqrt{2\log\log n}\}_+ - \mathsf{E}\{|N| - (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n}\}_+ \right| \\
\leqslant\ & 2\int_0^{2|a_n|\sqrt{2\log\log n}} \Big| \mathsf{P}(N \geqslant x + \epsilon\sqrt{2\log\log n}) \\
& \qquad - \mathsf{P}(N \geqslant x + (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n}) \Big| \mathrm{d}x \\
& + 2\int_{2|a_n|\sqrt{2\log\log n}}^{\infty} \Big| \mathsf{P}(N \geqslant x + \epsilon\sqrt{2\log\log n}) \\
& \qquad - \mathsf{P}(N \geqslant x + (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n}) \Big| \mathrm{d}x \\
=:\ & 2(A_{n1} + A_{n2}).
\end{aligned}
$$

不失一般性，设 $|a_n| \leqslant \lambda/\log\log n$, $\lambda > 0$. 注意到

$$
\begin{aligned}
A_{n1} &= \int_0^{\frac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\log\log n}}} \Big|\mathsf{P}(N \geqslant x + \epsilon\sqrt{2\log\log n}) \\
&\quad -\mathsf{P}(N \geqslant x + (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n})\Big|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^{\frac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\log\log n}}} \frac{|a_n|\sqrt{2\log\log n}}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(x + (\epsilon - |a_n|)\sqrt{2\log\log n})^2}{2}\}\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{\pi\log\log n}} \exp\{-(\epsilon - \lambda/\log\log n)^2 \log\log n\} \\
&\quad \cdot \int_0^{\frac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\log\log n}}} \exp\{-\frac{x^2}{2} - x(\epsilon - \frac{\lambda}{\log\log n})\sqrt{2\log\log n}\}\mathrm{d}x \\
&\leqslant C\frac{1}{\sqrt{\log\log n}} \exp\{-(\epsilon - \lambda/\log\log n)^2 \log\log n\} \\
&\quad \cdot \int_0^{\frac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\log\log n}}} \exp\{x(\frac{\sqrt{2}\lambda}{\log\log n})\}\mathrm{d}x \\
&\leqslant C\frac{1}{\sqrt{\log\log n}} \exp\{-\epsilon^2 \log\log n + 2\epsilon\lambda\}
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
A_{n2} &= \int_{\frac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\log\log n}}}^{\infty} \Big|\mathsf{P}(N \geqslant x + \epsilon\sqrt{2\log\log n}) \\
&\quad -\mathsf{P}(N \geqslant x + (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n}))\Big|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{\pi\log\log n}} \exp\{-(\epsilon - \lambda/\log\log n)^2 \log\log n\} \\
&\quad \cdot \int_{\frac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\log\log n}}}^{\infty} \exp\{-\frac{x^2}{2} - x(\epsilon - \frac{\lambda}{\log\log n})\sqrt{2\log\log n}\}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{\pi \log\log n}} \exp\{-\epsilon^2 \log\log n + 2\epsilon\lambda - \lambda^2/\log\log n\} \\
&\quad \cdot \int_{\frac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\log\log n}}}^{\infty} \exp\{-\frac{x}{2}(x + 2\epsilon\sqrt{2\log\log n} - \frac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{2\log\log n}})\}\mathrm{d}x \\
&\leqslant C\frac{1}{\sqrt{\log\log n}} \exp\{-\epsilon^2 \log\log n + 2\epsilon\lambda\}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(\delta+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log\log n}} \exp\{-\epsilon^2 \log\log n\} \\
\leqslant\ & \lim_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(\delta+1)} \int_{e^e}^{\infty} \frac{(\log\log x)^{\delta-1/2}}{x\log x} \exp\{-\epsilon^2\log\log x\}\mathrm{d}x \\
=\ & \lim_{\epsilon\searrow 0} \epsilon \int_{\epsilon^2}^{\infty} y^{\delta-1/2}\exp\{-y\}\mathrm{d}y \qquad (\text{令}\ \ y = \epsilon^2\log\log x) \\
=\ & \lim_{\epsilon\searrow 0} \epsilon \int_{\epsilon^2}^{1} y^{\delta-1/2}e^{-y}\mathrm{d}y + \lim_{\epsilon\searrow 0} \epsilon \int_{1}^{\infty} y^{\delta-1/2}e^{-y}\mathrm{d}y \\
\leqslant\ & C\lim_{\epsilon\searrow 0} \epsilon \int_{\epsilon^2}^{1} y^{\delta-1/2}e^{-y}\mathrm{d}y = 0.
\end{aligned}
$$

由此，得到 (3.3.4). 命题得证.

命题 3.3.2 对于 $\delta > -1$ 以及任意正数 $M > 2$, 我们有

$$
\lim_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(\delta+1)} \sum_{n\leqslant c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} \Big| n^{-1/2}E\{|S_n| - (\epsilon + a_n)\sqrt{2n\log\log n}\}_+ - E\{|N| - (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n}\}_+ \Big| = 0. \tag{3.3.5}
$$

证明 对任意的 $0<\eta<1/2$, 易得

$$
\begin{aligned}
&\epsilon^{2(\delta+1)}\sum_{n\leqslant b(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}\Big|n^{-1/2}\mathsf{E}\{|S_n|-(\epsilon+a_n)\sqrt{2n\log\log n}\}_+\\
&\quad-\mathsf{E}\{|N|-(\epsilon+a_n)\sqrt{2\log\log n}\}_+\Big|\\
=\;&\epsilon^{2(\delta+1)}\sum_{n\leqslant b(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}\Big|\int_0^{n^\eta}\mathsf{P}\{\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\geqslant x+(\epsilon+a_n)\sqrt{2\log\log n}\}\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{n^\eta}^{\infty}\mathsf{P}\{\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\geqslant(\epsilon+a_n)\sqrt{2\log\log n}+x\}\mathrm{d}x\\
&\quad-\Big(\int_0^{n^\eta}\mathsf{P}\{|N|\geqslant(\epsilon+a_n)\sqrt{2\log\log n}+x\}\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{n^\eta}^{\infty}\mathsf{P}\{|N|\geqslant(\epsilon+a_n)\sqrt{2\log\log n}+x\}\mathrm{d}x\Big)\Big|\\
\leqslant\;&\epsilon^{2(\delta+1)}\sum_{n\leqslant b(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}\Big\{\int_0^{n^\eta}\Big|\mathsf{P}(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\geqslant(\epsilon+a_n)\sqrt{2\log\log n}+x)\\
&\quad-\mathsf{P}(|N|\geqslant(\epsilon+a_n)\sqrt{2\log\log n}+x)\Big|\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{n^\eta}^{\infty}\Big|\mathsf{P}(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\geqslant(\epsilon+a_n)\sqrt{2\log\log n}+x)\\
&\quad-\mathsf{P}(|N|\geqslant(\epsilon+a_n)\sqrt{2\log\log n}+x)\Big|\mathrm{d}x\Big\}\\
=:\;&\epsilon^{2(\delta+1)}\sum_{n\leqslant b(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n}(\varDelta_{n1}+\varDelta_{n2}).
\end{aligned}\tag{3.3.6}
$$

由 (3.1.2), 有

$$
\begin{aligned}
\varDelta_{n1}\;=\;&\int_0^{n^\eta}\Big|\mathsf{P}(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\geqslant(\epsilon+a_n)\sqrt{2\log\log n}+x)\\
&-\mathsf{P}(|N|\geqslant(\epsilon+a_n)\sqrt{2\log\log n}+x)\Big|\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$\leqslant n^{\eta} \sup_{0<x<\infty} \left| \mathsf{P}(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \geqslant x) - \mathsf{P}(|N| \geqslant x) \right|$$

$$\leqslant Cn^{\eta-1/2} \to 0, \qquad 当 \quad n \to \infty, \quad 对 \eta < 1/2. \tag{3.3.7}$$

由引理 3.1.4, 对 $\alpha \geqslant 2$, $\sup_n \mathsf{E}|S_n/\sqrt{n}|^{\alpha} < \infty$. 再由 Markov 不等式, 当 $x \geqslant n^{\eta}$ 时, 有

$$\left| \mathsf{P}(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \geqslant (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n} + x) - \mathsf{P}(|N| \geqslant (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n} + x) \right| \leqslant Cx^{-\alpha}.$$

因此得到

$$\begin{aligned} \Delta_{n2} &= \int_{n^{\eta}}^{\infty} \left| \mathsf{P}(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \geqslant (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n} + x) \right. \\ &\quad \left. - \mathsf{P}(|N| \geqslant (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n} + x) \right| \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{n^{\eta}}^{\infty} Cx^{-\alpha} \mathrm{d}x \\ &\leqslant Cn^{\eta(-\alpha+1)} \to 0, \qquad 当 \quad n \to \infty, \quad 对 \quad 0 < \eta < 1/2, \quad \alpha \geqslant 2. \end{aligned}$$

定义 $\Delta_n = \Delta_{n1} + \Delta_{n2}$, 则

$$(\log\log m)^{-\delta-1} \sum_{n=1}^{m} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} \Delta_n \to 0, \qquad 当 \quad m \to \infty.$$

有

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon^{2(\delta+1)} \sum_{n \leqslant b(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} \left| n^{-1/2} \mathsf{E}\{|S_n| - (\epsilon + a_n)\sqrt{2n\log\log n}\}_+ \right. \\ &\quad \left. - \mathsf{E}\{|N| - (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n}\}_+ \right| \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon^{2(\delta+1)} \sum_{n \leqslant b(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} \Delta_n \end{aligned}$$

$$\leqslant C \lim_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2(\delta+1)} (\log\log b(\epsilon))^{\delta+1} [\log\log b(\epsilon)]^{-\delta-1} \sum_{n\leqslant b(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} \Delta_n$$

$$= C \lim_{\epsilon\searrow 0} M^{\delta+1} [\log\log b(\epsilon)]^{-\delta-1} \sum_{n\leqslant b(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} \Delta_n = 0. \tag{3.3.8}$$

命题得证.

命题 3.3.3 令 $a_n = O(1/\log\log n)$. 那么对于任意的 $\delta > -1$, 若

$$E\left[\varepsilon_1^3 (\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\right] < \infty,$$

我们有

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2\delta+2} \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n} \Big| E\{|S_n| - (\epsilon + a_n)\sqrt{2n\log\log n}\}_+$$

$$-n^{1/2} E\{|N| - (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n}\}_+ \Big| = 0. \tag{3.3.9}$$

证明 只要证明对于任意小的 $0 < \epsilon < 1$ 一致成立

$$\lim_{M\to\infty} \epsilon^{2\delta+2} \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} E\{|N| - (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n}\}_+ = 0 \tag{3.3.10}$$

以及

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{2\delta+2} \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n} E\{|S_n| - (\epsilon + a_n)\sqrt{2n\log\log n}\}_+ = 0. \tag{3.3.11}$$

注意到, 若 $n > c(\epsilon)$, $M > 4 + C_0$, 那么 $|a_n| \leqslant C_0/\log\log n \leqslant C_0 M^{-1}\epsilon^2 < \epsilon/4$

以及对 $M > 2$ 和 $0 < \epsilon < 1$, 有 $c(\epsilon) - 1 \geqslant c(\epsilon)/2$. 那么，当 $M \to \infty$ 时,

$$\epsilon^{2(\delta+1)} \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} \mathsf{E}\{|N| - (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n}\}_+$$

$$= \epsilon^{2(\delta+1)} \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} \int_0^{\infty} \mathsf{P}\{|N| \geqslant x + (\epsilon + a_n)\sqrt{2\log\log n}\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \epsilon^{2(\delta+1)} \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n\log n} \int_0^{\infty} \mathsf{P}\{|N| \geqslant x + \epsilon\sqrt{2\log\log n}/2\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \epsilon^{2(\delta+1)} \int_{c(\epsilon)/2}^{\infty} \frac{(\log\log y)^{\delta}}{y\log y} \int_{\epsilon\sqrt{2\log\log y}/2}^{\infty} \mathsf{P}\{|N| \geqslant x\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令$t = \epsilon\sqrt{2\log\log y}/2$

$$\leqslant 2^{\delta+2} \int_{\sqrt{M}/2}^{\infty} t^{2\delta+1} \int_t^{\infty} \mathsf{P}\{|N| \geqslant x\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant 2^{\delta+2} \int_{\sqrt{M}/2}^{\infty} \mathsf{P}\{|N| \geqslant x\} \int_{\sqrt{M/2}}^{x} t^{2\delta+1}\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{2^{\delta+2}}{2\delta+2} \int_{\sqrt{M}/2}^{\infty} x^{2\delta+2}\mathsf{P}\{|N| \geqslant x\}\mathrm{d}x \to 0$$

则 (3.3.10) 得证.

然后，由引理 3.1.4, 有

$$\sum_{n>b(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n} \mathsf{E}\{|S_n| - (\epsilon + a_n)\sqrt{2n\log\log n}\}_+$$

$$\leqslant \sum_{n>b(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n} \mathsf{E}\{|S_n| - \frac{\epsilon}{2}\sqrt{2n\log\log n}\}_+$$

$$= \sum_{n>b(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n} \int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty} P\{|S_n| \geqslant x\}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n>b(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n} \int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty} \frac{\mathsf{E}|S_n|^3}{x^3}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C \sum_{n>b(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n} \int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty} \frac{n^{3/2}}{x^3}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C \sum_{n>b(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^{\delta}}{\log n}\epsilon^{-2}(n\log\log n)^{-1}.$$

则对任意的 $-1<\delta<0$,

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}\mathsf{E}\{|S_n|-(\epsilon+a_n)\sqrt{2n\log\log n}\}_+$$

$$\leqslant C\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}\epsilon^{-2}\sum_{n>b(\epsilon)}\frac{1}{n\log n(\log\log n)^{1-\delta}}$$

$$\leqslant C\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta}(\log\log b(\epsilon))^{\delta}$$

$$\leqslant C\lim_{M\to\infty}M^{\delta}=0. \tag{3.3.12}$$

接下来，当 $\delta\geqslant 0$ 时，注意到

$$\sum_{k=1}^{n}X_k=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{k+i}\varepsilon_i,$$

记 $a_{ni}=\sum_{k=1}^{n}a_{k+i}$. 那么 $\sum_{k=1}^{n}X_k=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ni}\varepsilon_i=:\sum_{i=-\infty}^{\infty}Y_i$. 由引理 2.2.1, 不失一般性，我们假设

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_{ni}|\leqslant n,\quad n\geqslant 1\quad 以及\quad \tilde{a}=:\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_i|\leqslant 1.$$

定义

$$Y_i^{'}=Y_iI\{|Y_i|\geqslant x\}-EY_iI\{|Y_i|\geqslant x\},\quad Y_i^{''}=Y_i-Y_i^{'}.$$

注意到，若 $n > c(\epsilon)$ 及 $M > 4 + C_0$, $|a_n| \leqslant C_0/\log\log n \leqslant C_0 M^{-1}\epsilon^2 < \epsilon/4$, 那么

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n^{3/2}\log n} E\{|S_n| - (\epsilon + a_n)\sqrt{2n\log\log n}\}_+ \\
\leqslant\ & \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n^{3/2}\log n} E\{|S_n| - \frac{\epsilon}{2}\sqrt{2n\log\log n}\}_+ \\
=\ & \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n^{3/2}\log n} \int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty} P\{|S_n| \geqslant x\}\mathrm{d}x \\
=\ & \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n^{3/2}\log n} \int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty} P\{|\sum_{i=-\infty}^{\infty} Y_i^{'} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} Y_i^{''}| \geqslant x\}\mathrm{d}x \\
\leqslant\ & \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n^{3/2}\log n} \int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty} \\
& \cdot\Big(P\{|\sum_{i=-\infty}^{\infty} Y_i^{'}| \geqslant x/2\} + P\{|\sum_{i=-\infty}^{\infty} Y_i^{''}| \geqslant x/2\}\Big)\mathrm{d}x \\
=:\ & \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n^{3/2}\log n}(I_1 + I_2).
\end{aligned}
$$

由引理 3.1.3, 对 $q \geqslant 2$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n^{3/2}\log n} I_1 \\
\leqslant\ & C\sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n^{3/2}\log n} \int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty} \\
& \cdot\Big(x^{-q}\sum_{i=-\infty}^{\infty} E|a_{ni}\varepsilon_i|^q I\{|a_{ni}\varepsilon_i| \geqslant x\} + \exp\{-\frac{Cx^2}{n}\}\Big)\mathrm{d}x \\
=:\ & \sum_{n>c(\epsilon)} \frac{(\log\log n)^\delta}{n^{3/2}\log n}(I_3 + I_4).
\end{aligned}
$$

首先对于 I_3, 由 (2.2.10), 我们有

$$\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}I_3$$

$$= C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q}\sum_{i=-\infty}^{\infty}E|a_{ni}\varepsilon_i|^q I\{|a_{ni}\varepsilon_i|\geqslant x\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q}\sum_{j=1}^{\infty}$$

$$\cdot\sum_{i\in I_{nj}}j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q I\{|\varepsilon_1|\geqslant xj^{1/p}\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}$$

$$\cdot\sum_{k\geqslant jx^p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q}\sum_{k=[x^p]}^{\infty}$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{[k/x^p]}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q}\sum_{k=[x^p]}^{\infty}$$

$$\sum_{j=1}^{[k/x^p]}(\sharp I_{nj})E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q}\sum_{k=[x^p]}^{\infty}$$

$$\cdot n(\frac{k}{x^p}+1)^{1/p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{1/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q-1}\sum_{k\geqslant x^{p}}$$

$$\cdot k^{1/p}E|\varepsilon_1|^{q}I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^{p}<k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{1/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q-1}\sum_{j\geqslant x}jE|\varepsilon_1|^{q}I\{j\leqslant|\varepsilon_1|<j+1\}\mathrm{d}x$$

令 $x=\epsilon\sqrt{2y\log\log y}/2$

$$\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{1/2}\log n}\int_{n}^{\infty}(\epsilon\sqrt{2y\log\log y}/2)^{-q-1}\sum_{j\geqslant\epsilon\sqrt{2y\log\log y}/2}jE|\varepsilon_1|^{q}$$

$$\cdot I\{j\leqslant|\varepsilon_1|<j+1\}\frac{\epsilon}{2}\Big((\log\log y)^{1/2}(2y)^{-1/2}+(2y\log y\log\log y)^{-1/2}\Big)\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\epsilon^{-q}\int_{c(\epsilon)/2}^{\infty}\frac{(\log\log t)^{\delta}}{t^{1/2}\log t}\int_{t}^{\infty}y^{-q/2-1}\big\{(\log\log y)^{-q/2}$$

$$+(\log y)^{-1/2}(\log\log y)^{-q/2-1}\big\}\sum_{j\geqslant y}\frac{\epsilon\sqrt{2j\log\log j}}{2}E|\varepsilon_1|^{q}$$

$$\cdot I\{\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\}\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C\epsilon^{-q+1}\int_{c(\epsilon)/2}^{\infty}\Big(\int_{c(\epsilon)/2}^{y}\frac{(\log\log t)^{\delta}}{t^{1/2}\log t}\mathrm{d}t\Big)y^{-q/2-1}\big\{(\log\log y)^{-q/2}$$

$$+(\log y)^{-1/2}(\log\log y)^{-q/2-1}\big\}\sum_{j\geqslant y}\sqrt{2j\log\log j}E|\varepsilon_1|^{q}$$

$$\cdot I\{\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\epsilon^{-q+1}\int_{c(\epsilon)/2}^{\infty}y^{1/2}(\log y)^{-1}(\log\log y)^{\delta}y^{-q/2-1}\big\{(\log\log y)^{-q/2}$$

$$+(\log y)^{-1/2}(\log\log y)^{-q/2-1}\big\}\sum_{j\geqslant y}\sqrt{2j\log\log j}E|\varepsilon_1|^{q}$$

$$\cdot I\{\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\}\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant C\epsilon^{-q+1}\sum_{j\geqslant c(\epsilon)/2}\Big\{\int_{c(\epsilon)/2}^{j}y^{-q/2-1/2}(\log y)^{-1}(\log\log y)^{\delta-q/2}\mathrm{d}y\\
&\quad+\int_{c(\epsilon)/2}^{j}y^{-q/2-1/2}(\log y)^{-3/2}(\log\log y)^{\delta-q/2-1}\mathrm{d}y\Big\}\\
&\quad\sqrt{2j\log\log j}E|\varepsilon_1|^q I\{\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\}\\
&=: I_{31}+I_{32}.
\end{aligned}$$

其中令 $q=2$,

$$\begin{aligned}
I_{31}&\leqslant C\epsilon^{-1}\sum_{j\geqslant c(\epsilon)/2}(c(\epsilon))^{-1/2}(\log c(\epsilon))^{-1}(\log\log j)^{\delta-1}\sqrt{2j\log\log j}E|\varepsilon_1|^2\\
&\quad\cdot I\{\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-2}(c(\epsilon))^{-1/2}(\log c(\epsilon))^{-1}E\big[|\varepsilon_1|^3(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big]\\
&\quad\cdot I\{|\varepsilon_1|^2\geqslant CM\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\}.
\end{aligned}$$

那么对于任意的 $\delta\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}I_{31}\\
&\leqslant C\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta}E\big[|\varepsilon_1|^3(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1}\big]I\big\{|\varepsilon_1|^2\geqslant CM\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\big\}=0.
\end{aligned}\tag{3.3.13}$$

以及

$$I_{32}\leqslant C\epsilon^{-1}\sum_{j\geqslant c(\epsilon)/2}(c(\epsilon))^{-1/2}(\log c(\epsilon))^{-3/2}(\log\log j)^{\delta-2}\sqrt{2j\log\log j}E|\varepsilon_1|^2$$

$$\cdot I\{\sqrt{2j\log\log j} \leqslant |\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon} < \sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\}$$

$$\leqslant \quad C\epsilon^{-2}(c(\epsilon))^{-1/2}(\log c(\epsilon))^{-3/2}E\big[|\varepsilon_1|^3(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-2}\big]$$

$$\cdot I\big\{|\varepsilon_1|^2 \geqslant CM\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\big\}.$$

则对于任意的 $\delta \geqslant 0$,

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}I_{32}$$

$$\leqslant \quad C\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta}E\big[|\varepsilon_1|^3(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-2}\big]$$

$$\cdot I\big\{|\varepsilon_1|^2 \geqslant CM\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\big\} = 0. \tag{3.3.14}$$

因此，对于任意的 $\delta \geqslant 0$, 由 (3.3.13) 以及 (3.3.14), 我们有

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^\delta}{n^{3/2}\log n}I_3 = 0. \tag{3.3.15}$$

现在我们开始估计 I_4,

$$\epsilon^{2(\delta+1)}\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^\delta}{n^{3/2}\log n}I_4$$

$$\leqslant \quad C\epsilon^{2(\delta+1)}\int_{c(\epsilon)/2}^{\infty}\frac{(\log\log y)^\delta}{y^{3/2}\log y}\int_{\epsilon\sqrt{2y\log\log y}/2}^{\infty}\exp\{-Cx^2y^{-1}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad 令 t = x/\sqrt{y}$$

$$= \quad C\epsilon^{2(\delta+1)}\int_{c(\epsilon)/2}^{\infty}\frac{(\log\log y)^\delta}{y\log y}\int_{\epsilon\sqrt{2\log\log y}/2}^{\infty}\exp\{-Ct^2\}\mathrm{d}t\mathrm{d}y$$

$$令 s = \epsilon\sqrt{2\log\log y}/2$$

$$\leqslant \quad C2^{-\delta}\int_{\sqrt{M}/2}^{\infty}s^{2\delta+1}\int_{s}^{\infty}\exp\{-Ct^2\}\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
&= C2^{-\delta}\int_{\sqrt{M}/2}^{\infty}\exp\{-Ct^2\}\int_{\sqrt{M}/2}^{t}s^{2\delta+1}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\leqslant C\int_{\sqrt{M}/2}^{\infty}\exp\{-Ct^2\}t^{2\delta+2}\mathrm{d}t \\
&= C\int_{M/4}^{\infty}t^{\delta+1/2}\exp\{-Ct\}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

那么，对任意的 $\delta \geqslant 0$,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(\delta+1)}\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}I_4 \\
\leqslant\ & C\lim_{M\to\infty}\int_{M/4}^{\infty}t^{\delta+1/2}\exp\{-Ct\}\mathrm{d}t. \qquad (3.3.16)
\end{aligned}
$$

因此由 (3.3.15) 以及 (3.3.16), 对于任意的 $\delta \geqslant 0$, 我们有

$$
\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2(\delta+1)}\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}I_1 = 0. \qquad (3.3.17)
$$

然后对于 I_2, 与 I_1 相似，利用引理 3.1.3, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}I_2 \\
\leqslant\ & C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty} \\
&\cdot\Big(x^{-q}\sum_{i=-\infty}^{\infty}E|a_{ni}\varepsilon_i|^q I\{|a_{ni}\varepsilon_i|<x\}+\exp\{-\frac{Cx^2}{n}\}\Big)\mathrm{d}x \\
=:\ & \sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}(I_5+I_4).
\end{aligned}
$$

对于 I_5, 由 (2.2.10), 我们有

$$\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}I_5$$

$$= C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q}\sum_{i=-\infty}^{\infty}E|a_{ni}\varepsilon_i|^q I\{|a_{ni}\varepsilon_i|<x\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q}$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i\in I_{nj}}j^{-q/p}E|\varepsilon_1|^q I\{|\varepsilon_1|<x(j+1)^{1/p}\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q}$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}\sum_{0\leqslant k\leqslant(j+1)x^p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q}$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}\sum_{0\leqslant k\leqslant 2x^p-1}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x$$

$$+C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q}$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}\sum_{2x^p\leqslant k\leqslant(j+1)x^p}E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x$$

$$=:\ I_6+I_7.$$

那么对于 I_6, 利用 (2.2.15), 并选取 $q>2$,

$$\begin{aligned}
I_6 \leqslant\; & C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{3/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q}n\sum_{0\leqslant k\leqslant 2x^{p}-1}E|\varepsilon_1|^{q}\\
&\cdot I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^{p}<k+1\}\mathrm{d}x\\
\leqslant\; & C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{1/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q}\sum_{0\leqslant j\leqslant x-1}E|\varepsilon_1|^{q}\\
&\cdot I\{2^{1/p}j\leqslant|\varepsilon_1|<2^{1/p}(j+1)\}\mathrm{d}x \qquad \text{令 } x=\epsilon\sqrt{2y\log\log y}/2\\
\leqslant\; & C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{1/2}\log n}\int_{n}^{\infty}(\epsilon\sqrt{2y\log\log y}/2)^{-q}\sum_{0\leqslant j\leqslant\epsilon\sqrt{2y\log\log y}/2-1}E|\varepsilon_1|^{q}\\
&\cdot I\{2^{1/p}j\leqslant|\varepsilon_1|<2^{1/p}(j+1)\}\frac{\epsilon}{2}\Big(\frac{\sqrt{\log\log y}}{\sqrt{2y}}+\frac{1}{\sqrt{2y\log y\log\log y}}\Big)\mathrm{d}y\\
\leqslant\; & C\epsilon^{-q+1}\int_{c(\epsilon)/2}^{\infty}\frac{(\log\log t)^{\delta}}{t^{1/2}\log t}\int_{t}^{\infty}\{y^{-q/2-1/2}(\log\log y)^{-q/2+1/2}\\
&+y^{-q/2-1/2}(\log y)^{-1/2}(\log\log y)^{-q/2-1/2}\}\sum_{0\leqslant j\leqslant y-1}E|\varepsilon_1|^{q}\\
&\cdot I\{2^{1/p}\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<2^{1/p}\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\}\mathrm{d}y\mathrm{d}t\\
\leqslant\; & C\epsilon^{-q+1}\int_{c(\epsilon)/2}^{\infty}\Big(\int_{c(\epsilon)/2}^{y}\frac{(\log\log t)^{\delta}}{t^{1/2}\log t}\mathrm{d}t\Big)\{y^{-q/2-1/2}(\log\log y)^{-q/2+1/2}\\
&+y^{-q/2-1/2}(\log y)^{-1/2}(\log\log y)^{-q/2-1/2}\}\sum_{0\leqslant j\leqslant y-1}E|\varepsilon_1|^{q}\\
&\cdot I\{2^{1/p}\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<2^{1/p}\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\epsilon^{-q+1}\int_{c(\epsilon)/2}^{\infty} y^{1/2}(\log y)^{-1}(\log\log y)^{\delta}\{y^{-q/2-1/2}(\log\log y)^{-q/2+1/2} \\
&\quad + y^{-q/2-1/2}(\log y)^{-1/2}(\log\log y)^{-q/2-1/2}\}\sum_{0\leqslant j\leqslant y-1} E|\varepsilon_1|^q \\
&\quad \cdot I\{2^{1/p}\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<2^{1/p}\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\}\mathrm{d}y \\
&\leqslant C\epsilon^{-q+1}\sum_{j\geqslant c(\epsilon)/2}\Big\{\int_{j+1}^{\infty} y^{-q/2}(\log y)^{-1}(\log\log y)^{\delta-q/2+1/2}\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{j+1}^{\infty} y^{-q/2}(\log y)^{-3/2}(\log\log y)^{\delta-q/2-1/2}\mathrm{d}y\Big\} \\
&\quad \cdot E|\varepsilon_1|^q I\{2^{1/p}\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<2^{1/p}\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\} \\
&=: I_{61}+I_{62}.
\end{aligned}
$$

对 $q>2$, 我们有

$$
\begin{aligned}
I_{61} &\leqslant C\epsilon^{-q+1}\sum_{j\geqslant c(\epsilon)/2} j^{-q/2+1}(\log j)^{-1}(\log\log j)^{\delta-q/2+1/2} \\
&\quad \cdot E|\varepsilon_1|^q I\{2^{1/p}\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<2^{1/p}\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\} \\
&\leqslant C\epsilon^{-q+1}\epsilon^{q-2}E\big[|\varepsilon_1|^2(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1/2}\big]I\{|\varepsilon_1|^2\geqslant CM\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\}.
\end{aligned}
$$

则对于任意的 $\delta\geqslant 0$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}I_{61} &\leqslant C\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+1}E\big[|\varepsilon_1|^2(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1/2}\big] \\
&\quad \cdot I\big\{|\varepsilon_1|^2\geqslant CM\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\big\}=0. \qquad (3.3.18)
\end{aligned}
$$

以及对 $q>2$,

$$\begin{aligned}
I_{62} &\leqslant C\epsilon^{-q+1}\sum_{j\geqslant c(\epsilon)/2} j^{-q/2+1}(\log j)^{-3/2}(\log\log j)^{\delta-q/2-1/2}\\
&\quad\cdot E|\varepsilon_1|^q I\{2^{1/p}\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<2^{1/p}\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\}\\
&\leqslant C\epsilon^{-q+1}\epsilon^{q-2}E\big[|\varepsilon_1|^2(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-3/2}\big]I\{|\varepsilon_1|^2\geqslant CM\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\}.
\end{aligned}$$

因此对于任意的 $\delta\geqslant 0$, 我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}I_{62} &\leqslant C\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+1}E\big[|\varepsilon_1|^2(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-3/2}\big]\\
&\quad\cdot I\big\{|\varepsilon_1|^2\geqslant CM\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\big\}=0. \qquad (3.3.19)
\end{aligned}$$

对于 I_7, 再利用 (2.2.15), 我们有

$$\begin{aligned}
I_7 &\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^\delta}{n^{3/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q}\sum_{k\geqslant 2x^p}\sum_{j\geqslant k/x^p-1}(\sharp I_{nj})j^{-q/p}\\
&\quad\cdot E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^\delta}{n^{3/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-q}\sum_{k\geqslant 2x^p}n\Big(\frac{k}{x^p}\Big)^{-(q-1)/p}\\
&\quad\cdot E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^\delta}{n^{1/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-1}\sum_{k\geqslant 2x^p}k^{-(q-1)/p}\\
&\quad\cdot E|\varepsilon_1|^q I\{k\leqslant|\varepsilon_1|^p<k+1\}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{1/2}\log n}\int_{\epsilon\sqrt{2n\log\log n}/2}^{\infty}x^{-1}\sum_{j\geqslant x}2^{-(q-1)/p}j^{-(q-1)}$$

$$\cdot E|\varepsilon_1|^q I\{2^{1/p}j\leqslant|\varepsilon_1|<2^{1/p}(j+1)\}\mathrm{d}x\qquad \text{令}\ x=\epsilon\sqrt{2y\log\log y}/2$$

$$\leqslant C\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^{\delta}}{n^{1/2}\log n}\int_{n}^{\infty}(\epsilon\sqrt{2y\log\log y}/2)^{-1}\sum_{j\geqslant\epsilon\sqrt{2y\log\log y}/2}j^{-(q-1)}$$

$$\cdot E|\varepsilon_1|^q I\{2^{1/p}j\leqslant|\varepsilon_1|<2^{1/p}(j+1)\}\frac{\epsilon}{2}\Big(\frac{\sqrt{\log\log y}}{\sqrt{2y}}+\frac{1}{\sqrt{2y\log y\log\log y}}\Big)\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\int_{c(\epsilon)/2}^{\infty}\frac{(\log\log t)^{\delta}}{t^{1/2}\log t}\int_{t}^{\infty}\{y^{-1}+y^{-1}(\log y)^{-1/2}(\log\log y)^{-1}\}$$

$$\cdot\sum_{j\geqslant y}(\epsilon\sqrt{2j\log\log j}/2)^{-(q-1)}E|\varepsilon_1|^q$$

$$\cdot I\{2^{1/p}\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<2^{1/p}\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\}\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C\epsilon^{-q+1}\int_{c(\epsilon)/2}^{\infty}\Big(\int_{c(\epsilon)/2}^{y}\frac{(\log\log t)^{\delta}}{t^{1/2}\log t}\mathrm{d}t\Big)\{y^{-1}+y^{-1}(\log y)^{-1/2}(\log\log y)^{-1}\}$$

$$\cdot\sum_{j\geqslant y}(\sqrt{2j\log\log j})^{-(q-1)}E|\varepsilon_1|^q$$

$$\cdot I\{2^{1/p}\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<2^{1/p}\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\epsilon^{-q+1}\int_{c(\epsilon)/2}^{\infty}y^{1/2}(\log y)^{-1}(\log\log y)^{\delta}\{y^{-1}+y^{-1}(\log y)^{-1/2}(\log\log y)^{-1}\}$$

$$\cdot\sum_{j\geqslant y}(\sqrt{2j\log\log j})^{-(q-1)}E|\varepsilon_1|^q$$

$$\cdot I\{2^{1/p}\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<2^{1/p}\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\}\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant C\epsilon^{-q+1}\sum_{j\geqslant c(\epsilon)/2}\Big\{\int_{c(\epsilon)/2}^{j} y^{-1/2}(\log y)^{-1}(\log\log y)^{\delta}\mathrm{d}y \\
&\quad+\int_{c(\epsilon)/2}^{j} y^{-1/2}(\log y)^{-3/2}(\log\log y)^{\delta-1}\mathrm{d}y\Big\}(\sqrt{2j\log\log j})^{-(q-1)}E|\varepsilon_1|^q \\
&\quad\cdot I\{2^{1/p}\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<2^{1/p}\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\} \\
&=: I_{71}+I_{72}.
\end{aligned}$$

则可得

$$\begin{aligned}
I_{71} &\leqslant C\epsilon^{-q+1}\sum_{j\geqslant c(\epsilon)/2} j^{1/2}(\log j)^{-1}(\log\log j)^{\delta}(\sqrt{2j\log\log j})^{-(q-1)} \\
&\quad\cdot E|\varepsilon_1|^q I\{2^{1/p}\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<2^{1/p}\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\} \\
&\leqslant C\epsilon^{-q+1}\sum_{j\geqslant c(\epsilon)/2} j^{-q/2+1}(\log j)^{-1}(\log\log j)^{\delta-q/2+1/2} \\
&\quad\cdot E|\varepsilon_1|^q I\{2^{1/p}\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<2^{1/p}\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\} \\
&\leqslant C\epsilon^{-q+1}\epsilon^{q-2}E\big[|\varepsilon_1|^2(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1/2}\big]I\{|\varepsilon_1|^2\geqslant CM\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\}.
\end{aligned}$$

那么对于任意的 $\delta\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}I_{71} &\leqslant C\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+1}E\big[|\varepsilon_1|^2(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-1/2}\big] \\
&\quad\cdot I\big\{|\varepsilon_1|^2\geqslant CM\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\big\}=0. \qquad (3.3.20)
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}I_{72} &\leqslant C\epsilon^{-q+1}\sum_{j\geqslant c(\epsilon)/2} j^{1/2}(\log j)^{-3/2}(\log\log j)^{\delta-1}(\sqrt{2j\log\log j})^{-(q-1)}\\&\quad\cdot E|\varepsilon_1|^q I\{2^{1/p}\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<2^{1/p}\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\}\\&\leqslant C\epsilon^{-q+1}\sum_{j\geqslant c(\epsilon)/2} j^{-q/2+1}(\log j)^{-3/2}(\log\log j)^{\delta-q/2-1/2}\\&\quad\cdot E|\varepsilon_1|^q I\{2^{1/p}\sqrt{2j\log\log j}\leqslant|\varepsilon_1|\frac{2}{\epsilon}<2^{1/p}\sqrt{2(j+1)\log\log(j+1)}\}\\&\leqslant C\epsilon^{-q+1}\epsilon^{q-2}E\big[|\varepsilon_1|^2(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-3/2}\big]I\{|\varepsilon_1|^2\geqslant CM\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\}.\end{aligned}$$

则对于任意的 $\delta\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}I_{72} &\leqslant C\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+1}E\big[|\varepsilon_1|^2(\log\log|\varepsilon_1|)^{\delta-3/2}\big]\\&\quad\cdot I\big\{|\varepsilon_1|^2\geqslant CM\exp\{\exp(M/\epsilon^2)\}\big\}=0.\end{aligned}\tag{3.3.21}$$

那么由 (3.3.18)–(3.3.21), 我们得到对任意的 $\delta\geqslant 0$,

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^\delta}{n^{3/2}\log n}I_5=0.\tag{3.3.22}$$

因此由 (3.3.16) 及 (3.3.22), 对任意的 $\delta\geqslant 0$, 有

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\epsilon\searrow 0}\epsilon^{2\delta+2}\sum_{n>c(\epsilon)}\frac{(\log\log n)^\delta}{n^{3/2}\log n}I_2=0.\tag{3.3.23}$$

最后综合 (3.3.12), (3.3.17) 以及 (3.3.23), (3.3.11) 证毕.

第四章 关于线性过程变点估计的极限性质

第一节 引 言

一般地说，变点就是“模型中的某个或某些量起突然变化之点”. 这种突然变化往往反映事物的某种质的变化，在自然界、社会及各种领域中很常见且具有重要性，虽然从统计学发展的角度看，变点的统计分析这个课题还不能说已发展得很充分成熟了 (它迄今只有四十余年的历史), 但变点问题在许多应用中都非常重要，因此针对一些常见的问题发展了若干行之有效的方法，对应用家来说不失为一个有用的工具. 一旦变点被合适定位后，原始模型就需要修改，以便得到更好的数据解释以及更精确的预测. 因此变点估计在经济建模中起了很重要的作用. 许多统计与经济文献中都包含了大量关于变点问题的著作. 近期比较全面的文献可以参见 Csőrgö 和 Horváth (1997).

单变点的均值变动估计的问题是其中一个热门的研究方向，引起了学术界的长期关注. Sen 和 Srivastava (1975a, b), Hawkins (1977), Worsley (1979, 1986),

James *et al.* (1987) 以及 Srivastava 和 Worsley (1986) 都考虑的是对一列正态序列提出单变点均值变动的检验. Hinkley (1970), Bhattacharya (1987), Yao (1987) 和其他很多学者考虑的是一列独立变量的单变点估计. 对于序列相关的数据, Picard (1985) 对阶已知的高斯自回归过程进行了估计. 以上这些作者考虑的都是极大似然估计 (MLE). 本章主要是由最小二乘估计 (LS) 方法来讨论线性过程未知变点估计的极限性质. 线性过程的 LS 方法是由 Bai (1994) 提出来的. LS 就是以观察值与理论值之差的平方和作为目标函数, 以其达到极小值之点作为有关参数的点估计, 这个方法不同于 MLE, 不须对模型中的随机误差的分布有特定的假设, 而且计算相对简便. Bai (1994) 用 LS 方法考虑了由 i.i.d. 随机变量序列产生的线性过程的单变点估计.

然而对相依随机变量序列变点的研究无疑是学术界更加感兴趣的问题. 本章第二节就是考虑在相依假设下线性过程单变点估计的极限性质. 在两方面改进了 Bai (1994) 的结果: (i) 将条件 $\sum_{j=0}^{\infty} j|a_j| < \infty$ 减弱到 $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$, (ii) 在更多的相依假设下用 LS 估计得到了类似的极限性质.

许多早期的努力都致力于单一变点的估计. 相对而言, 涉及到多变点的文献则较少. 当变点数目未知时多变点问题更加复杂, 因此更少的文章致力于此问题. 许多作者只考虑独立随机变量序列的特殊情况. 特别的, Yao (1988) 由'Schwarz'准则估计了独立正态序列均值的变点数目. 但是近期相依观测方面的研究也引起了学术界的广泛关注. 例如 Bai, 1994; Davis et al., 1995; Horváth, 1993,1997; Picard, 1985; Epps (1988) 以及 Bai 和 Perron (1998) 等.

本章的第三节就是讨论了各种相依假设下线性过程多变点的相合性以及相合速度. 当变点数目已知时, 主要运用了 Bai (1994) 提出的 LS 方法来估计变点. 而变点数目未知的情况下, 则是通过惩罚最小二乘方法来估计的. 此方法根据惩罚性可以视为模型选择问题 (参见 Schwarz, 1978).

利用弱或强不变原理对观测序列进行逼近检验是变点分析中一种很重要的工具. 当弱不变原理成立时, Horváth (2000) 讨论了变点估计的逼近 CUSUM 检验. 本章第四节的主要目的就是在弱不变原理成立的条件下, 对强相依过程进行均值和方差的基于最小二乘残差的逼近 CUSUM 检验.

第二节 在短程相依的假设下线性过程单变点估计的极限性质

§4.2.1 模型和主要结果

我们考虑由 Zhang (2000a) 提出的一种新的相依随机变量定义，被称为渐近线性坐标负相依 (简称 ALNQD)(参见定义 1.2.1)，此种相依变量要比 LNQD 和 ρ^*- 混合随机变量弱 (定义参见 Bradley (1993) 及 Peligrad (1996)).

本节中我们仅考虑单个变点，模型如下:

$$Y_t = \begin{cases} \mu_1 + X_t & 若\ t \leqslant k_0 \\ \mu_2 + X_t & 若\ t > k_0, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

其中 μ_1, μ_2 及 k_0 为未知参数， k_0 为变点. X_t 为平稳线性过程，定义如下

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \tag{4.2.2}$$

其中 $\{a_j; j \in Z^+\}$ 为满足 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$ 的实数序列以及 $\{\varepsilon_t; t \in Z^+\}$ 为一平稳 ALNQD 随机变量序列满足 $E\varepsilon_t = 0,\ 0 < E\varepsilon_t^2 < \infty$.

关键的问题就是在给定 T 个观测值 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_T$ 的情况下估计变点 k_0. 对某个 $\tau_0, \tau \in (0,1)$, 假设 $k_0 = [\tau_0 T]$, $k = [\tau T]$, 其中 $[\cdot]$ 为取整函数.

定义变点 k_0 的 LS 估计 $\hat{k}$:

$$\hat{k} = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \Big\{ \min_{\mu_1,\mu_2} \Big(\sum_{t=1}^{k}(Y_t - \mu_1)^2 + \sum_{t=k+1}^{T}(Y_t - \mu_2)^2 \Big) \Big\},$$

其中 argmin$\{f(\theta)\}$ 为使函数 $f(\theta)$ 达到最小的那个点. 对于每个假定的变点 $k = 1, 2, \cdots, T$, 计算相对 μ_1 和 μ_2 的最小二乘估计

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} Y_t, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T} Y_t$$

以及残差平方和

$$\mathrm{RSS(k)} = \sum_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{k}}\{\mathrm{Y_t} - \hat{\mu}_1\}^2 + \sum_{\mathrm{t=k+1}}^{\mathrm{T}}\{\mathrm{Y_t} - \hat{\mu}_2\}^2.$$

那么变点 k_0 的 LS 估计为:

$$\hat{k} = \underset{1\leqslant k\leqslant T}{\operatorname{argmin}} \mathrm{RSS(k)},$$

以及 τ_0 的 LS 估计即为:

$$\hat{\tau} = \inf\{\tau : \tau = \underset{\tau\in[\underline{\tau},\overline{\tau}]}{\operatorname{argmin}} \mathrm{RSS}([\mathrm{T}\tau])\}, \tag{4.2.3}$$

其中 $\underline{\tau} < \overline{\tau}$ 为两个事先规定的介于 0 和 1 之间的常数.

令 $\lambda = \mu_2 - \mu_1$ 为变化的大小, 由定义 $X_t^* = X_t + \lambda \mathrm{I}\{t > k_0\}$, 我们可记

$$\mathrm{RSS}(k) = \sum_{t=1}^{T} X_t^{*^2} - \mathrm{J_T}(k),$$

其中

$$\mathrm{J_T}(k) = \frac{1}{k}(\sum_{t=1}^{k} X_t^*)^2 + \frac{1}{T-k}(\sum_{t=k+1}^{T} X_t^*)^2.$$

那么 τ_0 的 LS 估计也可为:

$$\hat{\tau} = \inf\{\tau : \tau = \underset{\tau\in[\underline{\tau},\overline{\tau}]}{\operatorname{argmax}} T^{-1}\mathrm{J_T}([T\tau])\}, \tag{4.2.4}$$

另一方面，记 $\hat{\mu}=\dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}Y_t$，为给定数据的均值估计．因此，对每个 k, $1\leqslant k\leqslant T-1$,

$$\sum_{t=1}^{T}(Y_t-\hat{\mu})^2=\mathrm{RSS}(k)+TZ_k^2,$$

其中 $Z_k=\{\dfrac{k(T-k)}{T^2}\}^{1/2}(\hat{\mu}_2-\hat{\mu}_1)$．这样 τ_0 的 LS 估计也可定义为：

$$\hat{\tau}=\inf\{\tau:\tau=\underset{\tau\in[\underline{\tau},\overline{\tau}]}{\operatorname{argmax}}|Z_{[T\tau]}|\}. \tag{4.2.5}$$

估计 (4.2.4) 和 (4.2.5) 都等价于估计 (4.2.3).

现在我们介绍本节的主要结果．定理 4.2.1 为变点估计的相合性．定理 4.2.2 为变点估计的相合速度．最后当样本数趋于无穷大时，定理 4.2.3 得到了 $\hat{\tau}$ 的渐近分布．

定理 4.2.1 给定模型 *(4.2.1)*, $\{X_t;t\in Z^+\}$ 如形式 *(4.2.2)* 的平稳线性过程，其中 $\{a_j;j\in Z^+\}$ 为满足 $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|<\infty$ 的实数序列以及 $\{\varepsilon_t;t\in Z^+\}$ 为平稳 *ALNQD* 随机变量序列满足 $E\varepsilon_t=0$, $0<E\varepsilon_t^2<\infty$．假设

$$\sum_{t=2}^{\infty}(E\varepsilon_1\varepsilon_t)^-<\infty,$$

$$0<\sigma^2=E\varepsilon_1^2+2\sum_{t=2}^{\infty}E\varepsilon_1\varepsilon_t<\infty \tag{4.2.6}$$

以及对某个 $\delta>0$,

$$\sup_{t\in Z^+}E|\varepsilon_t|^{2+\delta}<\infty. \tag{4.2.7}$$

若 $\tau_0\in[\underline{\tau},\overline{\tau}]\subset[0,1]$, 那么当 $T\to\infty$ 时， $\hat{\tau}\xrightarrow{P}\tau_0$, 其中 $\hat{\tau}$ 由 *(4.2.3)* 给出．

定理 4.2.2 给定模型 *(4.2.1)* 与定理 *4.2.1* 定义相同．假定定理 *4.2.1* 中的假设 *(4.2.6)* 和 *(4.2.7)* 都满足．则若 $\tau_0\in[\underline{\tau},\overline{\tau}]\subset[0,1]$, 那么 $|\hat{\tau}-\tau_0|=O_P(\dfrac{1}{T\lambda^2})$.

定理 4.2.3 给定模型 (4.2.1) 且 $\mu_1=\mu_2$. 令 $\{X_t;t\in Z^+\}$ 形如 (4.2.2) 式, 与定理 4.2.1 定义相同. 假定定理 4.2.1 中的假设都满足. 则若 $[\underline{\tau},\overline{\tau}]\subset[0,1]$, 那么

$$\hat{\tau}\xrightarrow{D}\underset{\tau\in[\underline{\tau},\overline{\tau}]}{\operatorname{argmax}}\,\psi(\tau),$$

其中 $\hat{\tau}$ 由 (4.2.3) 给出以及对 $\tau\in[\underline{\tau},\overline{\tau}]$,

$$\psi(\tau)=\frac{(\sum_{j=0}^{\infty}a_j)^2\delta^2B^2(\tau)}{\tau}+\frac{(\sum_{j=0}^{\infty}a_j)^2\delta^2\{B(1)-B(\tau)\}^2}{1-\tau},$$

其中 $B(s)$ 为 [0,1] 上的标准布朗运动.

§4.2.2 引理及其证明

为了证明变点估计的相合速度, 我们需要以下引理.

引理 4.2.1 (参见 Zhang(2000a)) 令 $\{\varepsilon_t;t\in Z^+\}$ 为 ALNQD 随机变量序列满足 $E\varepsilon_t=0$, $0<E\varepsilon_t^2<\infty$. 假设满足条件 (4.2.7), 那么存在 $r>2$ 及不依赖于 n 的常数 B_r 和 C_r, 对 $n\geqslant1$ 以及 $m\geqslant0$ 成立

$$E(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_{m+1}+\cdots+\varepsilon_{k+m}|^r)\leqslant B_rn^{\frac{r}{2}}\max_{1\leqslant k\leqslant n}E|\varepsilon_k|^r\leqslant C_rn^{\frac{r}{2}}.$$

特别地,

$$E(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_{m+1}+\cdots+\varepsilon_{k+m}|^2)\leqslant Cn,\quad\forall n\geqslant1,m\geqslant0.\tag{4.2.8}$$

引理 4.2.2 $\{\varepsilon_t;t\in Z^+\}$ 为满足 $E\varepsilon_t=0$, $0<E\varepsilon_t^2<\infty$ 的平稳 ALNQD 随机变量序列. 令 $X_t=\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon_{t-j}$, $S_n=\sum\limits_{t=1}^{n}X_t$, 其中 $\{a_j;j\in Z^+\}$ 为满足

$\sum_{j=0}^{\infty}|a_j| < \infty$ 的实数序列. 假设满足条件 *(4.2.7)*. 那么存在常数 C 使得

$$E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|^2 \leqslant Cn. \tag{4.2.9}$$

证明 令 $\widetilde{X_t} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\varepsilon_t$, $\widetilde{S_n} = \sum_{t=1}^{n}\widetilde{X_t}$, 有

$$\begin{aligned}\widetilde{S_k} &= \sum_{t=1}^{k}\widetilde{X_t} = \sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=0}^{\infty}a_j)\varepsilon_t \\ &= \sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=0}^{k-t}a_j)\varepsilon_t + \sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=k-t+1}^{\infty}a_j)\varepsilon_t \\ &= \sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=0}^{t-1}a_j\varepsilon_{t-j}) + \sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=k-t+1}^{\infty}a_j)\varepsilon_t.\end{aligned}$$

这样 $\widetilde{S_k} - S_k = -\sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=t}^{\infty}a_j\varepsilon_{t-j}) + \sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=k-t+1}^{\infty}a_j)\varepsilon_t$. 那么由 C_r 不等式,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\widetilde{S_k} - S_k|^2 \\ = &\frac{1}{n}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=k-t+1}^{\infty}a_j)\varepsilon_t - \sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=t}^{\infty}a_j\varepsilon_{t-j})|^2 \\ \leqslant &C\frac{1}{n}(E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=k-t+1}^{\infty}a_j)\varepsilon_t|^2 + E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{t=1}^{k}(\sum_{j=t}^{\infty}a_j\varepsilon_{t-j})|^2) \\ \triangleq &C\frac{1}{n}(E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}|^2 + E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{II}|^2).\end{aligned}$$

首先, 由 Minkowski 不等式, 引理 4.2.1 以及控制收敛定理,

$$\frac{1}{n}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{II}|^2 = \frac{1}{n}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{t=1}^{k}\sum_{j=t}^{\infty}a_j\varepsilon_{t-j}|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{j\wedge k}a_j\varepsilon_{t-j}|^2 \\
&\leqslant \frac{1}{n}(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\{E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{t=1}^{j\wedge k}\varepsilon_{t-j}|^2\}^{\frac{1}{2}})^2 \\
&\leqslant \frac{1}{n}\{\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|C^{\frac{1}{2}}(j\wedge n)^{\frac{1}{2}}\}^2 \\
&\leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|((j\wedge n)/n)^{\frac{1}{2}}\Big)^2 = o(1) \qquad (4.2.10)
\end{aligned}
$$

然后，将 I 分成两部分，$\mathrm{I}=\mathrm{I}_{k_1}+\mathrm{I}_{k_2}$，其中 $\mathrm{I}_{k_1}=a_1\varepsilon_1+a_2(\varepsilon_k+\varepsilon_{k-1})+\cdots+a_k(\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_1)$ 以及 $\mathrm{I}_{k_2}=(a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots)(\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_1)$. 令 $\{p_n\}$ 为满足当 $n\to\infty$ 时，$p_n\to\infty$ 以及 $p_n/n\to 0$ 的正整数序列．那么

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{k_2}|^2 &\leqslant \Big(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|\Big)^2\frac{1}{n}E\max_{1\leqslant k\leqslant p_n}|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k|^2 \\
&\quad +\Big(\sum_{j>p_n}|a_j|\Big)^2\frac{1}{n}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k|^2 \\
&\leqslant C(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|\Big)^2(\frac{p_n}{n})+C\Big(\sum_{j>p_n}|a_j|\Big)^2=o(1).
\end{aligned}
$$

对每个 $1\leqslant m<k$, 定义 $\mathrm{I}_{k_1,m}=a_1\varepsilon_1+a_2(\varepsilon_k+\varepsilon_{k-1})+\cdots+a_m(\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_{k-m+1})$, 我们有，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{\mathrm{k_1,m}}|^2 &\leqslant \frac{1}{n}(\sum_{j=1}^{m}|a_j|)^2E\max_{m\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_{k-m+1}|^2 \\
&\leqslant C(\sum_{j=1}^{m}|a_j|)^2(\frac{m}{n}) \qquad (4.2.11)
\end{aligned}
$$

以及

$$\begin{aligned}
\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{k_{1,m}}-\mathrm{I}_{k_1}| &= \max_{m<k\leqslant n}|\sum_{j=m+1}^{k}a_j(\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_{k-j+1})| \\
&\leqslant \max_{m<k\leqslant n}(\sum_{j=m+1}^{k}|a_j|\max_{m<j\leqslant k}|\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_{k-j+1}|) \\
&\leqslant \max_{m<k\leqslant n}(\sum_{j=m+1}^{k}|a_j|\max_{m<j\leqslant k}|\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_1|) \\
&\quad +|\max_{m<k\leqslant n}(\sum_{j=m+1}^{k}a_j)\max_{m<j\leqslant k}(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-j})| \\
&\leqslant (\sum_{j=m+1}^{n}|a_j|)\max_{m<k\leqslant n}|\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_1| \\
&\quad +(\sum_{j=m+1}^{n}|a_j|)\max_{m<k\leqslant n}\max_{m<j\leqslant k}|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-j}| \\
&\leqslant 2(\sum_{j=m+1}^{n}|a_j|)\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_1|.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{k_{1,m}}-\mathrm{I}_{k_1}|^2 &\leqslant 4\frac{1}{n}(\sum_{j=m+1}^{n}a_j)^2E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_k+\cdots+\varepsilon_1|^2 \\
&\leqslant 4C(\sum_{j=m+1}^{n}a_j)^2. \qquad (4.2.12)
\end{aligned}$$

令 $m=[\sqrt{n}]$, 由 (4.2.11) 和 (4.2.12), 可以得到 $\frac{1}{n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{k_1}|^2=o(1)$. 那么

$$\frac{1}{n}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}|^2\leqslant C_2\frac{1}{n}(E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{k_1}|^2+E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{I}_{k_2}|^2)=o(1). \qquad (4.2.13)$$

再由 (4.2.10) 和 (4.2.13), 我们可得

$$\frac{1}{n}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\widetilde{S_k}-S_k|^2\to 0 \quad (n\to\infty). \qquad (4.2.14)$$

因此由 (4.2.8), 得到

$$E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\widetilde{S_k}|^2=E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|(\sum_{j=0}^{\infty}a_j)\varepsilon_t|^2\leqslant C(\sum_{j=0}^{\infty}a_j)^2n\leqslant C_1n. \tag{4.2.15}$$

最后根据 (4.2.14) 和 (4.2.15), 证得 $E\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|^2\leqslant C_2n$.

由 (4.2.14) 以及 Zhang (2000b) 中的定理 2.2, 我们得到以下形如 (4.2.2) 式的 X_t 的不变原理.

引理 4.2.3 令 $\{X_t;t\in Z^+\}$ 为形如 *(4.2.2)* 式的平稳线性过程, 其中 $\{a_j;j\in Z^+\}$ 为满足 $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|<\infty$ 的实数序列以及 $\{\varepsilon_t;t\in Z^+\}$ 为平稳 *ALNQD* 随机变量序列满足 $E\varepsilon_t=0,\ 0<E\varepsilon_t^2<\infty$. 假定满足定理 *4.2.1* 的假设, 那么

$$T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{[Ts]}X_t\Rightarrow(\sum_{j=0}^{\infty}a_j)\sigma B(s), \tag{4.2.16}$$

其中 $B(s)$ 为 [0,1] 上的标准布朗运动.

§4.2.3 定理的证明

定理 4.2.1 的证明 对 $k=[T\tau]$ 容易得到,

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{[T\tau]}\lambda\mathrm{I}\{t>[T\tau_0]\}\rightarrow\lambda\int_0^{\tau}\mathrm{I}\{\tau>\tau_0\}\mathrm{d}s=\begin{cases}0 & \tau\leqslant\tau_0\\ \lambda(\tau-\tau_0) & \tau>\tau_0\end{cases}$$

以及

$$\frac{1}{T}\sum_{t=[T\tau]+1}^{T}\lambda\mathrm{I}\{t>[T\tau_0]\}\rightarrow\lambda\int_{\tau}^{1}\mathrm{I}\{\tau>\tau_0\}\mathrm{d}s=\begin{cases}\lambda(1-\tau_0) & \tau\leqslant\tau_0\\ \lambda(1-\tau) & \tau>\tau_0.\end{cases}$$

由不变原理 (4.2.16), 我们可得 $\sum_{t=1}^{T} X_t$ 为 $O_P(T^{\frac{1}{2}})$, 因此

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{[T\tau]} X_t \xrightarrow{P} 0, \quad \frac{1}{T}\sum_{t=[T\tau]+1}^{T} X_t \xrightarrow{P} 0.$$

最后,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\mathrm{J_T}([T\tau]) &= \frac{T}{[T\tau]}\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{[T\tau]}\Big(X_t + \lambda \mathrm{I}\{t > [T\tau_0]\}\Big)\right\}^2 \\
&+ \frac{T}{[T - T\tau]}\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=[T\tau+1]}^{T}\Big(X_t + \lambda \mathrm{I}\{t > [T\tau_0]\}\Big)\right\}^2 \\
&\xrightarrow{P} \begin{cases} \dfrac{(1-\tau_0)^2}{1-\tau}\lambda^2 & \tau \leqslant \tau_0 \\ (1 - 2\tau_0 + \dfrac{\tau_0^2}{\tau})\lambda^2 & \tau > \tau_0, \end{cases}
\end{aligned}$$

其中在点 $\tau = \tau_0$ 时, 极限达到最大值 $(1-\tau_0)\lambda^2$. 由 LS 估计 (4.2.4), 以及以上所有的收敛结果在 $\tau \in [\underline{\tau}, \overline{\tau}]$ 上都一致成立, 因此结论成立, 即当 $T \to \infty$ 时, $\hat{\tau} \xrightarrow{P} \tau_0$, 其中 $\hat{\tau}$ 由 (4.2.3) 给出.

定理 4.2.2 的证明 首先由引理 4.2.2, 对任意的 $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}
P(\sup_{k \geqslant 2^m} \frac{1}{k}|\sum_{t=1}^{k} X_t| > \alpha) &= P(\sup_{i \geqslant m}\sup_{2^i \leqslant k < 2^{i+1}} \frac{1}{k}|\sum_{t=1}^{k} X_t| > \alpha) \\
\leqslant\ & P(\sup_{i \geqslant m}\sup_{k < 2^{i+1}} |\sum_{t=1}^{k} X_t| > \alpha 2^i) \leqslant \sum_{i \geqslant m} P(\sup_{k < 2^{i+1}} |\sum_{t=1}^{k} X_t| > \alpha 2^i) \\
\leqslant\ & \sum_{i \geqslant m} \frac{C2^{i+1}}{(\alpha 2^i)^2} = \frac{2C}{\alpha^2}\sum_{i=m}^{\infty} 2^{-i} = \frac{4C}{\alpha^2 2^m},
\end{aligned}$$

我们得到对某个 $C_1 < \infty$,

$$P(\sup_{k \geqslant m} \frac{1}{k}|\sum_{t=1}^{k} X_t| > \alpha) \leqslant \frac{4C}{\alpha^2 m} = \frac{C_1}{\alpha^2 m}. \tag{4.2.17}$$

选取 $\delta>0$ 满足 $\tau_0\in(\delta,1-\delta)$. 由于 $\hat{\tau}$ 为 τ_0 的相合估计, 因此对所有的 $\epsilon>0$, 当 T 充分大时, $P(\hat{\tau}\notin(\delta,1-\delta))<\epsilon$. 这样我们仅需要考察那些满足 $T\delta\leqslant k\leqslant T(1-\delta)$ 的 k 的 Z_k. 只需证明当 $T\lambda^2$ 和 M 充分大时, $P(|\hat{\tau}-\tau_0|>M(T\lambda^2)^{-1})$ 充分小. 对所有的 $M>0$, 定义 $D_{T,M}=\{k:T\delta\leqslant k\leqslant T(1-\delta),|k-k_0|>M\lambda^{-2}\}$, 那么由 LS 估计 (4.2.5),

$$\begin{aligned}P\{|\hat{\tau}-\tau_0|>M(T\lambda^2)^{-1}\} &\leqslant P\{\hat{\tau}\notin(\delta,1-\delta)\}\\ &\quad +P\{|\hat{\tau}-\tau_0|>M(T\lambda^2)^{-1},\hat{\tau}\in(\delta,1-\delta)\}\\ &\leqslant \epsilon+P(\sup_{k\in D_{T,M}}|Z_k|\geqslant|Z_{k_0}|).\end{aligned}$$

由于 $|x|\geqslant|y|$ 意味着

$$(a)\quad x-y\geqslant0 \quad 及 \quad x+y\geqslant0$$

$$或\quad (b)\quad x-y\leqslant0 \quad 及 \quad x+y\leqslant0,$$

我们有

$$\begin{aligned}P(\sup_{k\in D_{T,M}}|Z_k|\geqslant|Z_{k_0}|) &\leqslant P(\sup_{k\in D_{T,M}}Z_k-Z_{k_0}\geqslant0)+P(\sup_{k\in D_{T,M}}Z_k+Z_{k_0}\leqslant0)\\ &\stackrel{\text{def}}{=} P_1+P_2,\end{aligned}$$

接下来我们分别证明当 $T\lambda^2$ 和 M 充分大时, P_1 及 P_2 都充分小.

定义 $b(k)=\{\frac{k}{T}(1-\frac{k}{T})\}^{1/2}$, $k=1,2,\cdots,T$, 下面这个事实很有用: 对某个 $B\geqslant0$,

$$0\leqslant b(k)\leqslant1,\quad |b(k_0)-b(k)|\leqslant B|k_0-k|/T. \tag{4.2.18}$$

现在考虑 P_2. 事件 $Z_k+Z_{k_0}\leqslant0$ 意味着

$$Z_k-EZ_k+Z_{k_0}-EZ_{k_0}\leqslant-EZ_k-EZ_{k_0}\leqslant-EZ_{k_0},$$

马上推出

$$Z_k - EZ_k \leqslant -EZ_{k_0}/2 \quad 或 \quad Z_{k_0} - EZ_{k_0} \leqslant -EZ_{k_0}/2. \tag{4.2.19}$$

由于 $EZ_{k_0} > 0$ (假设 $\lambda > 0$), (4.2.19) 可推出

$$|Z_k - EZ_k| \geqslant EZ_{k_0}/2 \quad 或 \quad |Z_{k_0} - EZ_{k_0}| \geqslant EZ_{k_0}/2.$$

这样

$$\begin{aligned}
P_2 &\leqslant P(\sup_{k\in D_{T,M}} |Z_k - EZ_k| \geqslant \frac{1}{2}EZ_{k_0}) + P(|Z_{k_0} - EZ_{k_0}| \geqslant \frac{1}{2}EZ_{k_0}) \\
&\leqslant 2P(\sup_{T\delta\leqslant k\leqslant T(1-\delta))} b(k)|\frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T} X_t - \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} X_t| \geqslant \frac{1}{2}EZ_{k_0}) \\
&\leqslant 2P(\sup_{k\leqslant T(1-\delta)} \frac{1}{T-k}|\sum_{t=k+1}^{T} X_t| \geqslant \frac{1}{4}EZ_{k_0}) + 2P(\sup_{k\geqslant T\delta} \frac{1}{k}|\sum_{t=1}^{k} X_t| \geqslant \frac{1}{4}EZ_{k_0}) \\
&\leqslant 2P(\sup_{T-k\geqslant T\delta} \frac{1}{T-k}|\sum_{t=k+1}^{T} X_t| \geqslant \frac{1}{4}EZ_{k_0}) + 2P(\sup_{k\geqslant T\delta} \frac{1}{k}|\sum_{t=1}^{k} X_t| \geqslant \frac{1}{4}EZ_{k_0}).
\end{aligned}$$

又因为 $EZ_{k_0} = \{\tau_0(1-\tau_0)\}^{1/2}\lambda$, 不等式 (4.2.17) 使得当 $T\lambda^2$ 趋向无穷大时以上式子的两项分别收敛到零.

接着考虑 P_1. 事件 $Z_k - Z_{k_0} \geqslant 0$ 意味着

$$Z_k - EZ_k - (Z_{k_0} - EZ_{k_0}) \geqslant EZ_{k_0} - EZ_k.$$

而,

$$\begin{aligned}
&Z_k - EZ_k - (Z_{k_0} - EZ_{k_0}) \\
= \;& b(k)(\frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T} X_t - \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} X_t) - b(k_0)(\frac{1}{T-k_0}\sum_{t=k_0+1}^{T} X_t - \frac{1}{k_0}\sum_{t=1}^{k_0} X_t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (b(k_0)\frac{1}{k_0}\sum_{t=1}^{k_0}X_t - b(k)\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}X_t) + (\frac{b(k)}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T}X_t - \frac{b(k_0)}{T-k_0}\sum_{t=k_0+1}^{T}X_t) \\
&\overset{\text{def}}{=} G(k) + H(k).
\end{aligned}
$$

对某个 $C_{\tau_0} > 0$ 将证明

$$
EZ_{k_0} - EZ_k \geqslant C_{\tau_0}\lambda|k_0 - k|/T. \tag{4.2.20}
$$

由于对称性，我们仅需要考虑 $k \leqslant k_0$ 的情况．不失一般性，假设 $\lambda > 0$ (否则考虑序列 $-Y_t$). 那么对 $k \leqslant k_0$,

$$
\begin{aligned}
EZ_k &= \{\frac{k}{T}\frac{T-k}{T}\}^{1/2}E(\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1) \\
&= \{\tau(1-\tau)\}^{1/2}\left\{\frac{(T-k_0)\mu_2 + (k_0-k)\mu_1}{T-k} - \mu_1\right\} \\
&= \frac{T-k_0}{T-k}\{\tau(1-\tau)\}^{1/2}(\mu_2 - \mu_1) \\
&= \frac{1-\tau_0}{1-\tau}\{\tau(1-\tau)\}^{1/2}\lambda > 0.
\end{aligned}
$$

特别地， $EZ_{k_0} = \{\tau_0(1-\tau_0)\}^{1/2}\lambda$. 立即可得

$$
\begin{aligned}
EZ_{k_0} - EZ_k &= \lambda\left\{\{\tau_0(1-\tau_0)\}^{1/2} - \{\tau(1-\tau)\}^{1/2}\frac{1-\tau_0}{1-\tau}\right\} \\
&= \lambda(1-\tau_0)\left\{(\frac{\tau_0}{1-\tau_0})^{1/2} - (\frac{\tau}{1-\tau})^{1/2}\right\}.
\end{aligned}
$$

上面的式子同乘同除 $(\frac{\tau_0}{1-\tau_0})^{1/2} + (\frac{\tau}{1-\tau})^{1/2}$, 我们得到

$$
\begin{aligned}
EZ_{k_0} - EZ_k &= \lambda\frac{\tau_0-\tau}{1-\tau}\{(\frac{\tau_0}{1-\tau_0})^{1/2} + (\frac{\tau}{1-\tau})^{1/2}\}^{-1} \\
&\geqslant \frac{1}{2}\lambda(\tau_0-\tau)(\frac{\tau_0}{1-\tau_0})^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

取 $C_{\tau_0}=\frac{1}{2}(\frac{\tau_0}{1-\tau_0})^{-1/2}$, (4.2.20) 证毕. 这样由 (4.2.20), 有

$$\begin{aligned}P_1 &\leqslant P\{\sup_{k\in D_{T,M}}\frac{T}{|k_0-k|}|G(k)|>\frac{1}{2}\lambda C_{\tau_0}\}\\ &\quad +P\{\sup_{k\in D_{T,M}}\frac{T}{|k_0-k|}|H(k)|>\frac{1}{2}\lambda C_{\tau_0}\}\\ &\stackrel{\text{def}}{=} P_{1,1}+P_{1,2}.\end{aligned}$$

现在我们证明当 $T\lambda^2$ 和 M 充分大时, $P_{1,1}$ 充分小. 再由对称性, 仅考虑 $k\leqslant k_0$ 及 $k\in D_{T,M}$ 的情况. 更精确地, 我们考虑那些满足 $T\delta\leqslant k\leqslant T\tau_0-M\lambda^{-2}$ 的 k. 由加项减项, $G(k)$ 可记为

$$G(k)=b(k_0)\frac{k-k_0}{kk_0}\sum_{t=1}^{k_0}X_t+\{b(k_0)-b(k)\}\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}X_t+b(k_0)\frac{1}{k}\sum_{t=k+1}^{k_0}X_t.$$

由 (4.2.18) 以及 $k\geqslant T\delta$, 我们有

$$|G(k)|\leqslant\frac{k_0-k}{T\delta k_0}|\sum_{t=1}^{k_0}X_t|+B\frac{k_0-k}{T}\frac{1}{T\delta}|\sum_{t=1}^{k}X_t|+\frac{k_0-k}{T\delta}\frac{1}{k_0-k}|\sum_{t=k+1}^{k_0}X_t|.$$

则由不等式 (4.2.9) 和 (4.2.17),

$$\begin{aligned}P_{1,1} &\leqslant P(\frac{1}{T\tau_0}|\sum_{t=1}^{T\tau_0}X_t|>\frac{1}{6}\delta\lambda C_{\tau_0})+P(\sup_{1\leqslant k\leqslant T}\frac{1}{T}|\sum_{t=1}^{k}X_t|>\frac{1}{6}\delta\lambda C_{\tau_0}B^{-1})\\ &\quad + P(\sup_{k\leqslant T\tau_0-M\lambda^{-2}}\frac{1}{T\tau_0-k}|\sum_{t=k+1}^{T\tau_0}X_t|>\frac{1}{6}\delta\lambda C_{\tau_0})\\ &\leqslant P(\frac{1}{T\tau_0}|\sum_{t=1}^{T\tau_0}X_t|>\frac{1}{6}\delta\lambda C_{\tau_0})+P(\sup_{1\leqslant k\leqslant T}\frac{1}{T}|\sum_{t=1}^{k}X_t|>\frac{1}{6}\delta\lambda C_{\tau_0}B^{-1})\\ &\quad + P(\sup_{T\tau_0-k\geqslant M\lambda^{-2}}\frac{1}{T\tau_0-k}|\sum_{t=k+1}^{T\tau_0}X_t|>\frac{1}{6}\delta\lambda C_{\tau_0})\\ &\leqslant C_1(\frac{6}{\delta C_{\tau_0}})^2\frac{1}{\tau_0 T\lambda^2}+C(\frac{6B}{\delta C_{\tau_0}})^2\frac{1}{T\lambda^2}+C_1(\frac{6}{\delta C_{\tau_0}})^2\frac{1}{M}.\end{aligned}$$

那么当 $T\lambda^2$ 和 M 充分大时，此三项都可以忽略不计． $P_{1,2}$ 的证明类似．

定理 4.2.3 的证明 当没有变点存在，由 LS 估计 (4.2.4) 可得 $X_t^* = X_t$,

$$\mathrm{J_T}(k) = \frac{1}{k}(\sum_{t=1}^{k} X_t)^2 + \frac{1}{T-k}(\sum_{t=k+1}^{T} X_t)^2.$$

则由不变原理 (4.2.16) 以及连续映射定理，有

$$\frac{(\sum_{t=1}^{[T\tau]} X_t/T^{\frac{1}{2}})^2}{[T\tau]/T} \Rightarrow \frac{(\sum_{j=0}^{\infty} a_j)^2\delta^2 B^2(\tau)}{\tau}.$$

类似地，

$$\frac{(\sum_{t=[T\tau]+1}^{T} X_t/T^{\frac{1}{2}})^2}{(T-[T\tau])/T} \Rightarrow \frac{(\sum_{j=0}^{\infty} a_j)^2\delta^2\{B(1)-B(\tau)\}^2}{1-\tau}.$$

那么在 $[\underline{\tau},\overline{\tau}]$ 上， $\mathrm{J_T} \Rightarrow \psi(\tau)$ 且由连续映射定理可得

$$\sup_{\tau\in[\underline{\tau},\overline{\tau}]} \mathrm{J_T}([T\tau]) \xrightarrow{D} \sup_{\tau\in[\underline{\tau},\overline{\tau}]} \psi(\tau).$$

当 $\hat{\tau}$ 使得 $\mathrm{J_T}$ 达到最大时，即得结论．

第三节 在短程相依的假设下线性过程多变点估计的极限性质

§4.3.1 模型和主要结果

§4.3.1.1 注记

本节模型假设如下:

$$Y_t = \mu_k^* + X_t, \quad t_{k-1}^* + 1 \leqslant t \leqslant t_k^*, \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \tag{4.3.1}$$

X_t 为形如 (4.2.2) 的平稳线性过程, 其中 $\{a_j; j \in Z^+\}$ 为满足条件 $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$ 的实数序列, $\{\varepsilon_t; t \in Z^+\}$ 为满足 $E\varepsilon_t = 0$, $0 < E\varepsilon_t^2 < \infty$ 的平稳 ALNQD 随机变量序列. 此模型表示 Y_t 的分布只与均值有关, 而均值在某些未知点 $(t_k^*, 1 \leqslant k \leqslant r, t_0^* = 0, t_{r+1}^* = n)$ 处变化, 其中 $t_k^* = [n\tau_k^*], 1 \leqslant k \leqslant r, \tau_0^* = 0, \tau_{r+1}^* = 1$. 因此问题的关键就是要根据 n 个观测值 $Y_1, \cdots, Y_n$ 来估计这些未知均值 $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_1^*, \cdots, \mu_r^*)$ 以及变点 $\boldsymbol{\tau}^* = (\tau_1^*, \cdots, \tau_r^*)$. 其中假设 $\min_k |\mu_{k+1}^* - \mu_k^*| > 0$, 变点的数目 r 为已知. 一般的, r 可以被视为未知的, 其真值为 r^*. 我们将在以后的章节中进行讨论.

此处考虑的方法基于最小二乘准则. 令 $\mathcal{A}_{n,r} = \{(t_0, t_1, \cdots, t_{r+1}), t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_r < t_{r+1} = n\}$ 为 r 个划分的集合. 下文中, 也考虑以下的 r 个

划分的集合：

$$\mathcal{A}_{n,r}^{\triangle_n}=\{(t_0,t_1,\cdots,t_{r+1}):t_k-t_{k-1}\geqslant n\triangle_n\},$$

其中 $\triangle_n$ 满足当 $n\to\infty$ 时以指定速度趋于零的非负非增实数.

对每个 $\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}$ 均值的 LS 估计首先由残差平方和最小化来得到，然后将其代入目标函数，最后的结果 $\mathrm{Q}_n(\mathbf{t})$ 定义如下

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_n(\mathbf{t}) &= \frac{1}{n}\min_{(\mu_1,\cdots,\mu_{r+1})\in R^{r+1}}\sum_{k=1}^{r+1}\sum_{t=t_{k-1}+1}^{t_k}(Y_t-\mu_k)^2\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r+1}\sum_{t=t_{k-1}+1}^{t_k}(Y_t-\overline{Y}(t_{k-1},t_k))^2,\end{aligned}\tag{4.3.2}$$

其中对任意序列 $\{\mu_t\}_{t\in Z}$, 定义其平均为 $\overline{\mu}(i,j)=(j-i)^{-1}\sum\limits_{t=i+1}^{j}\mu_t$. 对任意 r 个划分 $\mathbf{t}$ 、 $\mathbf{t}'\in\mathcal{A}_{n,r}$, 定义 $\|\mathbf{t}-\mathbf{t}'\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant r}|t_k-t_k'|$.

§4.3.1.2 变点数已知的变点估计

定理 4.3.1 *给定变点模型 (4.3.1), $\{X_t;t\in Z^+\}$ 为形如 (4.2.2) 的平稳线性过程，其中 $\{a_j;j\in Z^+\}$ 为满足 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|a_j|<\infty$ 的实数序列， $\{\varepsilon_t;t\in Z^+\}$ 为满足 $E\varepsilon_t=0$, $0<E\varepsilon_t^2<\infty$ 的平稳 ALNQD 随机变量序列. 假设条件 (4.2.7) 满足. 令 $\{\triangle_n\}_{n\geqslant 0}$ 为满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\triangle_n=0$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}n\triangle_n=\infty$ 的正的非增序列，令 $\hat{\mathbf{t}}_n^{\triangle_n}=\operatorname*{argmin}\limits_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}^{\triangle_n}}\mathrm{Q}_n(\mathbf{t})$, 其中 $\operatorname{argmin}\{f(\theta)\}$ 为使函数 $f(\theta)$ 达到最小的那个点. 那么 $\hat{\boldsymbol{\tau}}_n^{\triangle_n}=\hat{\mathbf{t}}_n^{\triangle_n}/n$ 依概率收敛于 $\boldsymbol{\tau}^*$.*

更精确地，定义 $\triangle_\tau^*\triangleq\min\limits_{1\leqslant k\leqslant r}|\tau_{k+1}^*-\tau_k^*|$. 存在一个常数 $K_1<\infty$ 使得对所有 $(\mu_1^*,\cdots,\mu_{r+1}^*)$, $0<\delta\leqslant\triangle_\tau^*$, 且 n 足够大，有

$$P(\|\hat{\boldsymbol{\tau}}_n^{\triangle_n}-\boldsymbol{\tau}^*\|_\infty\geqslant\delta)\leqslant\frac{K_1}{\delta n\underline{\lambda}^2}\left(\frac{1}{\triangle_n}+\frac{(\overline{\lambda}/\underline{\lambda})^2}{\delta}\right)$$

成立，其中 $\underline{\lambda} \triangleq \min\limits_{1\leqslant k\leqslant r} |\mu_{k+1}^* - \mu_k^*|$, $\overline{\lambda} \triangleq \max\limits_{1\leqslant k\leqslant r} |\mu_{k+1}^* - \mu_k^*|$.

从本节第二子节定理 4.3.1 的证明中可以看出，限制两个连续变点间的最小长度为 $n\triangle_n$, 是为了得到 $\mathrm{V}_n(\mathbf{t})$ 的一致界 ($\mathrm{V}_n(\mathbf{t})$ 的定义参见定理 4.3.1 的证明). 事实上，对扰动过程限制更强的条件后，最小长度的限制就可以去掉. $\mathrm{V}_n(\mathbf{t})$ 的一致界可以由以下条件得到：令 $\{\beta_n\}$ 为满足 $\beta_n \to 0$ 以及 $n\beta_n \to \infty$ 的非增序列,

$$\lim_{n\to\infty} P(\max_{0\leqslant t_1<t_2\leqslant n} (t_2-t_1)^{-1} |\sum_{t=t_1+1}^{t_2} X_t|^2 \geqslant n\beta_n) = 0. \tag{4.3.3}$$

定理 4.3.2 给定模型 *(4.3.1)*, $\{X_t; t\in Z^+\}$ 为形如 *(4.2.2)* 的平稳线性过程，定义同定理 *4.3.1*. 假设对某个 $\delta > 0$, 满足

$$\sup_{t\in Z^+} E|\varepsilon_t|^{4+\delta} < \infty. \tag{4.3.4}$$

令 $\hat{\mathbf{t}}_n = \operatorname*{argmin}\limits_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}} \mathrm{Q}_n(\mathbf{t})$. 那么 $\hat{\boldsymbol{\tau}}_n = \hat{\mathbf{t}}_n/n$ 依概率收敛于 $\boldsymbol{\tau}^*$.

之前，对扰动项加条件后，最小长度大小 $\triangle_n$ 的约束就可以去掉. 此处，提出另一个方法来得到变点估计的相合性，将估计 $\hat{\mu}_k$, $1\leqslant k\leqslant r$ 的值限制在 R^{r+1} 的某个紧子集 Θ 中. 定义对比函数 T_n 使得计算于 $\boldsymbol{\tau}^*$ 的第 k 部分的 μ_k^* 的最小对比估计 $\hat{\mu}_k$ 满足 $\mathrm{T}_n(Y_k,\hat{\mu}_k) \leqslant \mathrm{T}_n(Y_k,\mu)$, $\forall\mu\in\Theta$, 其中 $\mathrm{T}_n(Y_k,\mu_k) = \frac{1}{n}\sum\limits_{t=t_{k-1}+1}^{t_k}(Y_t-\mu_k)^2$, $\hat{\mu}_k = \frac{1}{t_k-t_{k-1}}\sum\limits_{t=t_{k-1}+1}^{t_k} Y_t$.

估计 $(\mathbf{t},\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_{n,r}\times\Theta$, 定义

$$\mathrm{J}_n(\mathbf{t},\boldsymbol{\mu}) \triangleq \sum_{k=1}^{r+1}\mathrm{T}_n(Y_k,\mu_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r+1}\sum_{t=t_{k-1}+1}^{t_k}(Y_k-\mu_k)^2,$$

$$\mathrm{Q}_n^{\Theta}(\mathbf{t}) \triangleq \min_{\boldsymbol{\mu}\in\Theta}\mathrm{J}_n(\mathbf{t},\boldsymbol{\mu}),\quad \hat{\mathbf{t}}_n^{\Theta} \triangleq \operatorname*{argmin}_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}}\mathrm{Q}_n^{\Theta}(\mathbf{t}).$$

这种情况下，不再需要约束连续变点间的最小长度.

定理 4.3.3 给定模型 *(4.3.1)*, $\{X_t; t\in Z^+\}$ 为形如 *(4.2.2)* 的平稳线性过程，定义同定理 *4.3.1*. 假设条件 *(4.2.7)* 满足. 那么对于 R_{r+1} 的使得 $(\mu_1^*,\cdots,\mu_{r+1}^*)\in\Theta$ 的任意紧子集 Θ ，有 $(\hat{\tau}_n^{\Theta}=\hat{\mathbf{t}}_n^{\Theta}/n,\hat{\boldsymbol{\mu}}_n)$ 依概率收敛于 $(\boldsymbol{\tau}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$.

§4.3.1.3 变点数未知的变点估计

上一子节中变点数目是看作已知的. 然而，一般来说变点数目经常是一个真值为 r^* 的未知变量. 因此用惩罚最小二乘方法来估计.

对任意 $R\in N$, 任意 $\triangle\geqslant 0$ 以及 $\Theta\subset R^{r+1}$, 考虑以下 $(\mathbf{t}^*,r^*)$ 的估计:

$$(\hat{\mathbf{t}}_n,\hat{r}_n)=\underset{0\leqslant r\leqslant R}{\operatorname{argmin}}\ \underset{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}}{\operatorname{argmin}}\{\mathrm{Q}_n(\mathbf{t})+\beta_n r\},$$

$$(\hat{\mathbf{t}}_n^{\triangle},\hat{r}_n^{\triangle})=\underset{0\leqslant r\leqslant R}{\operatorname{argmin}}\ \underset{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}^{\triangle}}{\operatorname{argmin}}\{\mathrm{Q}_n(\mathbf{t})+\beta_n r\},$$

$$(\hat{\mathbf{t}}_n^{\Theta},\hat{r}_n^{\Theta})=\underset{0\leqslant r\leqslant R}{\operatorname{argmin}}\ \underset{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}}{\operatorname{argmin}}\{\mathrm{Q}_n^{\Theta}(\mathbf{t})+\beta_n r\},$$

其中 $\{\beta_n\}$ 为递减的正实数序列. 定义 $\hat{\tau}_n$, $\hat{\tau}_n^{\triangle}$ 和 $\hat{\tau}_n^{\Theta}$ 为相应的变点估计.

定理 4.3.4 给定模型 *(4.3.1)*, $\{X_t; t\in Z^+\}$ 为形如 *(4.2.2)* 的滑动平均过程，定义同定理 *4.3.1*.

(i) 假定满足定理 *4.3.2* 中的假设 *(4.3.4)*. 那么对任意使得 *(4.3.3)* 成立且满足 $\beta_n\to 0$, $n\beta_n\to\infty$ 的序列 $\{\beta_n\}$, 若 $r^*\leqslant R$, 则 $(\hat{\tau}_n,\hat{r}_n)$ 依概率收敛于 $(\boldsymbol{\tau}^*,r^*)$.

(ii) 假定满足条件 *(4.2.7)*. 那么对任意满足 $\triangle_n\to 0$, $\beta_n\to 0$ 以及 $n\triangle_n\beta_n\to+\infty$ 的非增序列 $\{\triangle_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$, 若 $r^*\leqslant R$, 则 $(\hat{\tau}_n^{\triangle_n},\hat{r}_n^{\triangle_n})$ 依概率收敛于 $(\boldsymbol{\tau}^*,r^*)$.

(iii) 假定满足条件 (4.2.7). 设 $n\beta_n \to +\infty$, 若 $r^* \leqslant R$ 且 $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_1^*, \cdots, \mu_{r^*+1}^*) \in \Theta$, 则对 R^{r+1} 的任意紧子集 Θ, $(\hat{\tau}_n^{\Theta}, \hat{r}_n^{\Theta})$ 依概率收敛于 $(\boldsymbol{\tau}^*, r^*)$.

§4.3.1.4 变点的相合速度

定理 4.3.5 给定模型 (4.3.1), $\{X_t; t \in Z^+\}$ 为形如 (4.2.2) 的平稳线性过程, 定义同定理 4.3.1. 假设条件 (4.2.7) 满足. 令 $\{\triangle_n\}_{n \geqslant 0}$ 为正的非增序列满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \triangle_n = 0$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty} n\triangle_n = \infty$, 令 $\hat{\mathbf{t}}_n^{\triangle_n}$ 为在 $\mathcal{A}_{n,r}^{\triangle_n}$ 上使得 $\mathrm{Q}_n(\mathbf{t})$ 达到最小的值 $\mathbf{t}$, 即,

$$\hat{\mathbf{t}}_n^{\triangle_n} = \underset{\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{n,r}^{\triangle_n}}{\operatorname{argmin}} \mathrm{Q}_n(\mathbf{t}),$$

其中 $\operatorname{argmin}\{f(\theta)\}$ 为使得函数 $f(\theta)$ 达到最小的那个点. 那么对于所有的 $1 \leqslant j \leqslant r$, $\hat{\tau}_j - \tau_j^* = O_p(\frac{1}{n\underline{\lambda}^2})$, 其中 $\underline{\lambda} = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant r} |\mu_{k+1}^* - \mu_k^*|$ 以及 $\overline{\lambda} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant r} |\mu_{k+1}^* - \mu_k^*|$.

§4.3.2 定理 4.3.1 和 4.3.2 的证明

为了证明定理, 需要以下引理.

引理 4.3.1 X_t 的定义同定理 4.3.1. 假定满足引理 4.2.2 中的假设, 那么存在常数 B 使得对 $m > 0$ 以及任意的 $\delta > 0$, 有

$$P(\max_{k \geqslant m} \frac{1}{k}|S_k| \geqslant \delta) \leqslant B\frac{1}{\delta^2 m}. \tag{4.3.5}$$

证明 由引理 4.2.2, 我们有

$$
\begin{aligned}
&P(\max_{k\geqslant m}\frac{1}{k}|S_k|\geqslant\delta)\\
\leqslant\ &\sum_{p=0}^{\infty}P(\max_{2^pm\leqslant k<2^{p+1}m}\frac{1}{k}|\sum_{t=1}^{k}X_t|>\delta)\\
\leqslant\ &\sum_{p=0}^{\infty}P(\max_{2^pm\leqslant k<2^{p+1}m}|\sum_{t=1}^{k}X_t|>\delta 2^pm)\\
\leqslant\ &\sum_{p=0}^{\infty}\frac{C}{\delta^2(2^pm)^2}(2^{p+1}m)\\
\leqslant\ &\frac{2C}{\delta^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2^pm}=B\frac{1}{\delta^2m}.
\end{aligned}
$$

定理 4.3.1 的证明 定义对任意 r 个划分 $t\in\mathcal{A}_{n,r}$, 有以下等式,

$$
\mathrm{J}_n(\mathbf{t}) = \mathrm{Q}_n(\mathbf{t})-\mathrm{Q}_n(\mathbf{t}^*),\quad \mathrm{K}_n(\mathbf{t})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r+1}\sum_{t=t_{k-1}+1}^{t_k}\big(EY_t-E\overline{Y}(t_{k-1},t_k)\big)^2,
$$

$$
\mathrm{V}_n(\mathbf{t}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r+1}\left\{\frac{\big(\sum_{t=t_{k-1}{}^*+1}^{t_k{}^*}X_t\big)^2}{t_k{}^*-t_{k-1}{}^*}-\frac{\big(\sum_{t=t_{k-1}+1}^{t_k}X_t\big)^2}{t_k-t_{k-1}}\right\},
$$

$$
\mathrm{W}_n(\mathbf{t}) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{r+1}\big\{\big(\sum_{t=t_{k-1}^*+1}^{t_k^*}X_t\big)\mu_k^*-\big(\sum_{t=t_{k-1}+1}^{t_k}X_t\big)E\overline{Y}(t_{k-1},t_k)\big\}.
$$

可以看出, $\mathrm{J}_n(\mathbf{t})$ 可分解为 $\mathrm{J}_n(\mathbf{t})=\mathrm{K}_n(\mathbf{t})+\mathrm{V}_n(\mathbf{t})+\mathrm{W}_n(\mathbf{t})$. 我们得到 $\mathrm{K}_n(\mathbf{t})$ 的下界为

$$
\mathrm{K}_n(\mathbf{t})\geqslant\min(\frac{1}{n}\|\mathbf{t}-\mathbf{t}^*\|_\infty,\triangle_\tau^*)\underline{\lambda}^2.
$$

相似地, 需要得到 $\mathrm{V}_n(\mathbf{t})$ 和 $\mathrm{W}_n(\mathbf{t})$ 的下界. 对于 $\mathrm{V}_n(\mathbf{t})$, 我们有

$$
\mathrm{V}_n(\mathbf{t})\geqslant-2n^{-2}\triangle_n^{-1}(r+1)\big(\max_{1\leqslant s\leqslant n}(\sum_{t=1}^{s}\varepsilon_t)^2+\max_{1\leqslant s\leqslant n}(\sum_{t=n-s}^{n}\varepsilon_t)^2\big).
$$

最后，注意到

$$\mathrm{W}_n(\mathbf{t}) = 2n^{-1}\sum_{k=1}^{r+1}\Big(\sum_{t=t_{k-1}^*+1}^{t_k^*} X_t - \sum_{t=t_{k-1}+1}^{t_k} X_t\Big)(\mu_k^* - \mu^*)$$

$$+2n^{-1}\sum_{k=1}^{r+1}\Big(\sum_{t=t_{k-1}+1}^{t_k} X_t\Big)(\mu_k^* - E\overline{Y}(t_{k-1},t_k)),$$

其中 $\mu^* \triangleq (r+1)^{-1}\sum_{k=1}^{r+1}\mu_k^*$. 因为对 $1 \leqslant j,k \leqslant r+1$, $|\mu_j^* - \mu_k^*| \leqslant r\overline{\lambda}$ 成立，所以可得 $|\mu_k^* - E\overline{Y}(t_{k-1},t_k)| \leqslant r\overline{\lambda}$ 以及 $|\mu_k^* - \mu^*| \leqslant r\overline{\lambda}$, 由此

$$|\mathrm{W}_n(\mathbf{t})| \leqslant 3n^{-1}(r+1)^2\overline{\lambda}\Big(\max_{1\leqslant s\leqslant n}\Big|\sum_{t=1}^{s} X_t\Big| + \max_{1\leqslant s\leqslant n}\Big|\sum_{t=n-s}^{n} X_t\Big|\Big),$$

那么 $\mathrm{W}_n(\mathbf{t}) \geqslant -3n^{-1}(r+1)^2\overline{\lambda}\Big(\max_{1\leqslant s\leqslant n}|\sum_{t=1}^{s} X_t| + \max_{1\leqslant s\leqslant n}|\sum_{t=n-s}^{n} X_t|\Big)$. 对任意 $\delta > 0$, 定义 $\mathcal{F}_{n,\delta}^{\triangle_n} \triangleq \{\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{n,r}^{\triangle_n}, \|\mathbf{t} - \mathbf{t}^*\|_\infty \geqslant n\delta\}$. 因为 $\mathbf{t}^* \in \mathcal{A}_{n,r}^{\triangle_n}$ 时，对足够大的 n, $\triangle_n \to 0$.

这样由引理 4.2.2, 对某个常数 $K_1 > 0$

$$P(\|\hat{\boldsymbol{\tau}}_n^{\triangle_n} - \boldsymbol{\tau}^*\|_\infty \geqslant \delta) \leqslant P\big(\min_{\mathbf{t}\in\mathcal{F}_{n,\delta}^{\triangle_n}} \mathrm{J}_n(\mathbf{t}) \leqslant 0\big)$$

$$\leqslant P\Big(-2n^{-2}\triangle_n^{-1}(r+1)\Big(\max_{1\leqslant s\leqslant n}\big(\sum_{t=1}^{s} X_t\big)^2 + \max_{1\leqslant s\leqslant n}\big(\sum_{t=n-s}^{n} X_t\big)^2\Big)$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}\min(n^{-1}\|\mathbf{t}-\mathbf{t}^*\|_\infty, \triangle_\tau^*)\underline{\lambda}^2\Big)$$

$$+P\Big(-3n^{-1}(r+1)^2\overline{\lambda}\Big(\max_{1\leqslant s\leqslant n}\Big|\sum_{t=1}^{s} X_t\Big| + \max_{1\leqslant s\leqslant n}\Big|\sum_{t=n-s}^{n} X_t\Big|\Big)$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}\min(n^{-1}\|\mathbf{t}-\mathbf{t}^*\|_\infty, \triangle_\tau^*)\underline{\lambda}^2\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant P(\max_{1\leqslant s\leqslant n}(\sum_{t=1}^{s}X_t)^2+\max_{1\leqslant s\leqslant n}(\sum_{t=n-s}^{n}X_t)^2\geqslant c\underline{\lambda}^2n^2\triangle_n\delta)\\
&\quad +P(\max_{1\leqslant s\leqslant n}|\sum_{t=1}^{s}X_t|+\max_{1\leqslant s\leqslant n}|\sum_{t=n-s}^{n}X_t|\geqslant c\underline{\lambda}^2n\delta\overline{\lambda}^{-1})\\
&\leqslant P(\max_{1\leqslant s\leqslant n}(\sum_{t=1}^{s}X_t)^2\geqslant \frac{c}{2}\underline{\lambda}^2n^2\triangle_n\delta)\\
&\quad +P(\max_{1\leqslant s\leqslant n}(\sum_{t=n-s}^{n}X_t)^2\geqslant \frac{c}{2}\underline{\lambda}^2n^2\triangle_n\delta)\\
&\quad +P(\max_{1\leqslant s\leqslant n}|\sum_{t=1}^{s}X_t|\geqslant \frac{c}{2}\underline{\lambda}^2n\delta\overline{\lambda}^{-1})\\
&\quad +P(\max_{1\leqslant s\leqslant n}|\sum_{t=n-s}^{n}X_t|\geqslant \frac{c}{2}\underline{\lambda}^2n\delta\overline{\lambda}^{-1})\\
&\leqslant K_1n^{-1}\underline{\lambda}^{-2}\delta^{-1}(\triangle_n^{-1}+\delta^{-1}(\overline{\lambda}/\underline{\lambda})^2).
\end{aligned}
$$

定理 4.3.2 的证明 与引理 4.2.2 的证明相似, 对某个 $s>2$ 以及 $C>0$, 可得 $E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{t=1}^{k}X_t|^{2s}\leqslant Cn^s$, 那么对所有的 $0\leqslant t_1<t_2<\infty$, 有 $E|\sum_{t=t_1+1}^{t_2}X_t|^{2s}\leqslant C(t_2-t_1)^s$. 令 $\{\beta_n\}$ 为满足 $\beta_n\to 0$ 和 $n\beta_n\to\infty$ 的非增序列, 由 Markov 不等式,

$$
\begin{aligned}
&P(\max_{1\leqslant t_1<t_2\leqslant n}(t_2-t_1)^{-1}|\sum_{t=t_1+1}^{t_2}X_t|^2\geqslant n\beta_n)\\
&\leqslant \sum_{t_1=1}^{n-1}\sum_{t_2=t_1+1}^{n}P(|\sum_{t=t_1+1}^{t_2}X_t|^2\geqslant n\beta_n(t_2-t_1))\\
&\leqslant \sum_{t_1=1}^{n-1}\sum_{t_2=t_1+1}^{n}C\frac{(t_2-t_1)^s}{(n\beta_n(t_2-t_1))^s}\leqslant Cn(n-1)\frac{1}{(n\beta_n)^s}.
\end{aligned}
$$

因此当 $\beta_n=n^{(2-s)/s}\log n$ 时, 条件 (4.3.3) 满足. 定理证明的其余部分与定理

4.3.1 相似.

§4.3.3 定理 4.3.3 的证明

下一步，我们开始证明定理 4.3.3. 估计 $(\hat{\mathbf{t}}_n^{\Theta}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_n)$ 使函数 $\mathrm{U}_n(\mathbf{t}, \boldsymbol{\mu})$ 达到最大

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_n(\mathbf{t}, \boldsymbol{\mu}) &= \mathrm{J}_n(\mathbf{t}, \boldsymbol{\mu}) - \mathrm{J}_n(\mathbf{t}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \\ &= \sum_{k=1}^{r+1}\sum_{j=1}^{r+1}\frac{n_{kj}}{n}(\mu_j^* - \mu_k)^2 - 2\sum_{k=1}^{r+1}\sum_{j=1}^{r+1}\frac{S_{kj}}{n}(\mu_k - \mu_j^*) \\ &\triangleq \mathrm{I}_1 + \mathrm{II}_2.\end{aligned}$$

$$n_{kj} = \sharp\Big\{\{t_{k-1}+1, \cdots, t_k\}\bigcap\{t_{j-1}^*, \cdots, t_j^*\}\Big\},$$

$$S_{kj} = \sum_{t\in\{t_{k-1}+1,\cdots,t_k\}\bigcap\{t_{j-1}^*,\cdots,t_j^*\}} X_t.$$

引理 4.3.2 对任意 $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_{n,r}\times\Theta$, 存在两个常数 $C_{\mu^*} > 0$ 和 $C_{\tau^*} > 0$ 使得

$$\mathrm{I}_1 \geqslant \max(C_{\mu^*}\frac{1}{n}\|\mathbf{t} - \mathbf{t}^*\|_\infty, C_{\tau^*}\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*\|_\infty^2),$$

其中 $\|\mathbf{t} - \mathbf{t}^*\|_\infty = \max\limits_k |t_k - t_k^*|$, $\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*\|_\infty^2 = \max\limits_k(\mu_k - \mu_k^*)^2$.

证明 对任意 $1 \leqslant k \leqslant r$, 令

$$\mathrm{h}_k(\boldsymbol{\mu}^*, \alpha) = \inf_{\boldsymbol{\mu}\in\Theta}(\alpha(\mu_{k+1}^* - \mu)^2 + (1-\alpha)(\mu_k^* - \mu)^2).$$

那么，我们有 $\mathrm{h}_k(\mu^*, 0) = \mathrm{h}_k(\mu^*, 1) = 0$. 此外， $\mathrm{h}_k(\mu^*, \cdot)$ 为凹函数，令 $\mathrm{H}_k(\mu^*) = 2\mathrm{h}_k(\mu^*, \frac{1}{2})$. 这样， $\mathrm{h}_k(\mu^*, \alpha) \geqslant \alpha\mathrm{H}_k(\mu^*)$, $\forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. 可以发现若 $\mu_{k+1}^* \neq \mu_k^*$,

$\mathrm{H}_k(\mu^*) > 0$, 令 $\underline{\mathrm{H}}(\mu^*) = \min_{1 \leqslant k \leqslant r} \mathrm{H}_k(\mu^*)$, 满足 $\underline{\mathrm{H}}(\mu^*) > 0$. 首先考虑满足条件 $\|\mathbf{t} - \mathbf{t}^*\|_\infty \leqslant \frac{n\triangle_\tau^*}{4}$ 的变点结构 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{n,r}$. 变点 t_k 可以再原始变点 t_k^* 的左边, 也可以在右边:

(i) 对任意满足 $t_{k-1} \leqslant t_k^* \leqslant t_k$ 的 k, 有 $\mathrm{I}_1 \geqslant \frac{n_{k,k+1}}{n}(\mu_{k+1}^* - \mu_k)^2 + \frac{n_{kk}}{n}(\mu_k^* - \mu_k)^2$. 令 $\alpha_{k,k+1} = \frac{n_{k,k+1}}{n_{k,k+1} + n_{kk}}$. 根据 n_{kj} 的定义和假设,

$\alpha_{k,k+1} \leqslant \frac{1}{2}$ 以及

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 &\geqslant \frac{n_{k,k+1} + n_{kk}}{n}(\alpha_{k,k+1}(\mu_{k+1}^* - \mu_k)^2) + (1 - \alpha_{k,k+1})(\mu_k^* - \mu_k)^2) \\
&\geqslant \alpha_{k,k+1}\mathrm{H}_k(\mu_k^*) \geqslant \frac{1}{n}(t_k - t_k^*)\underline{\mathrm{H}}(\mu^*).
\end{aligned}
$$

(ii) 对任意满足 $t_k \leqslant t_k^* \leqslant t_{k+1}$ 的 k, 用同样的方法令 $\alpha_{k,k-1} = \frac{n_{k,k-1}}{n_{k,k-1} + n_{kk}}$. 类似地, $\alpha_{k,k-1} \leqslant \frac{1}{2}$, $\mathrm{I}_1 \geqslant \frac{1}{n}(t_k^* - t_k)\underline{\mathrm{H}}(\mu^*)$. 这样, 若 $\|\mathbf{t} - \mathbf{t}^*\|_\infty \leqslant \frac{1}{4}n\triangle_\tau^*$, 有 $\mathrm{I}_1 \geqslant \underline{H}(\mu^*)\frac{1}{n}\|\mathbf{t} - \mathbf{t}^*\|_\infty$.

另一方面, $\mathrm{I}_1 \geqslant \max_k \frac{(\mu_k^* - \mu_k)^2 n_{kk}}{n}$. 因此, 若 $\|\mathbf{t} - \mathbf{t}^*\|_\infty \leqslant \frac{1}{4}n\triangle_\tau^*$, 以及对任意 k, $\frac{n_{kk}}{n} \geqslant \frac{\triangle_\tau^*}{2}$ 那么 $\mathrm{I}_1 \geqslant \frac{\triangle_\tau^*}{2}\max_k(\mu_k^* - \mu_k)^2$.

然后考虑 $\|\mathbf{t} - \mathbf{t}^*\|_\infty > \frac{1}{4}n\triangle_\tau^*$, 发现存在一对 (k, j) 满足 $n_{kj} \geqslant \frac{1}{4}n\triangle_\tau^*$ 和 $n_{k,j+1} \geqslant \frac{1}{4}n\triangle_\tau^*$. 令 $\alpha_{k,j+1} = \frac{n_{k,j+1}}{n_{k,j+1} + n_{kj}}$. 对任意 $\boldsymbol{\mu} \in \Theta$, 我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 &\geqslant \frac{n_{k,j+1} + n_{kj}}{n}(\alpha_{k,j+1}(\mu_{j+1}^* - \mu_k)^2 + (1 - \alpha_{k,j+1})(\mu_j^* - \mu_k)^2) \\
&\geqslant \frac{n_{k,j+1} + n_{kj}}{n}\min(\alpha_{k,j+1}, 1 - \alpha_{k,j+1})\underline{\mathrm{H}}(\mu^*) \\
&\geqslant \frac{n_{k,j+1} + n_{k,j+1}}{n}\min(\frac{n_{k,j+1}}{n}, \frac{n_{k,j+1}}{n})\underline{\mathrm{H}}(\mu^*) \geqslant \frac{\triangle_\tau^{*^2}}{8}\underline{\mathrm{H}}(\mu^*).
\end{aligned}
$$

最后, 利用对 $0 \leqslant a, b \leqslant 1$, $\min(a, b) \geqslant ab$, 可以得到

$$
\mathrm{I}_1 \geqslant \underline{\mathrm{H}}(\mu^*)\min(\frac{\triangle_\tau^*}{2}, \frac{1}{n}\|\mathbf{t} - \mathbf{t}^*\|_\infty) \geqslant \frac{\triangle_\tau^{*^2}\underline{\mathrm{H}}(\mu^*)}{8n}\|\mathbf{t} - \mathbf{t}^*\|_\infty
$$

以及

$$\mathrm{I}_1 \geqslant \frac{\triangle_\tau^*}{2}\min(\frac{\triangle_\tau^*}{4}, \max_k(\mu_k - \mu_k^*)^2) \geqslant \frac{\triangle_\tau^{*2}}{8}\max_k(\mu_k - \mu_k^*)^2.$$

这样，令 $C_{\mu^*} = \frac{1}{8}\triangle_\tau^{*2}\underline{\mathrm{H}}(\mu^*)$, $C_{\tau^*} = \frac{\triangle_\tau^{*2}}{8}$, 那么

$$\mathrm{I}_1 \geqslant \max(C_{\mu^*}\frac{1}{n}\|\mathbf{t} - \mathbf{t}^*\|_\infty, C_{\tau^*}\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*\|_\infty^2).$$

引理得证.

定理 4.3.3 的证明 对任意 $\delta > 0$, 定义

$$\mathcal{A}_{n,r}^\delta = \{\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{n,r} : \|\mathbf{t} - \mathbf{t}^*\|_\infty > n\delta\}, \quad \Theta^\delta = \{\boldsymbol{\mu} \in \Theta : \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*\|_\infty^2 > \delta\}.$$

这样，由引理 4.3.2, 我们有

$$\inf_{(\mathbf{t},\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_{n,r}^\delta \times \Theta} \mathrm{I}_1 \geqslant C_{\mu^*}\delta, \qquad \inf_{(\mathbf{t},\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_{n,r} \times \Theta^\delta} \mathrm{I}_1 \geqslant C_{\tau^*}\delta.$$

那么,

$$P(\|\hat{\boldsymbol{\tau}}_n - \boldsymbol{\tau}^*\|_\infty > \delta)$$

$$\leqslant P(\inf_{(\mathbf{t},\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_{n,r}^\delta \times \Theta} \mathrm{U}_n(\mathbf{t}, \boldsymbol{\mu}) < 0) \leqslant P(\sup_{(\mathbf{t},\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_{n,r}^\delta \times \Theta} |\mathrm{I}_2| > \inf_{(\mathbf{t},\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_{n,r}^\delta \times \Theta} \mathrm{I}_1)$$

$$\leqslant 2P(\max_{(\mathbf{t},\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_{n,r}^\delta \times \Theta} \sum_{k=1}^{r+1} |\frac{1}{n}S_k| > \frac{C_{\mu^*}\delta}{2}) \leqslant 2(r+1)P(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\frac{1}{n}S_k| > \frac{C_{\mu^*}\delta}{2(r+1)}).$$

类似地，可以证明

$$P(\|\hat{\boldsymbol{\mu}}_n - \boldsymbol{\mu}^*\|_\infty^2 > \delta) \leqslant 2(r+1)P(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\frac{1}{n}S_k| > \frac{C_{\tau^*}\delta}{2(r+1)}).$$

因此，由引理 4.2.2, $(\hat{\boldsymbol{\tau}}_n^\Theta, \hat{\boldsymbol{\mu}}_n)$ 依概率收敛于 $(\boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$.

§4.3.4 定理 4.3.4 的证明

定理 4.3.4 的证明 我们只证明 (i). 要证明 $(\hat{\tau}_n,\hat{r}_n)$ 依概率收敛，只需证明 $P(\hat{r}_n\neq r^*)$ 趋向于零. 根据 $(\hat{\tau}_n,\hat{r}_n)$ 地定义, 我们有 $\mathrm{Q}_n(\hat{\mathbf{t}}_n)+\beta_n\hat{r}_n\leqslant \mathrm{Q}_n(\mathbf{t}^*)+\beta_n r^*$. 这个关系式意味着 $\mathrm{K}_n(\hat{\mathbf{t}}_n)+\mathrm{V}_n(\hat{\mathbf{t}}_n)+\mathrm{W}_n(\hat{\mathbf{t}}_n)+\beta_n(\hat{r}_n-r^*)\leqslant 0$. 那么

$$
\begin{aligned}
P(\hat{r}_n=r) &\leqslant P(\mathrm{K}_n(\hat{\mathbf{t}}_n)+\mathrm{V}_n(\hat{\mathbf{t}}_n)+\mathrm{W}_n(\hat{\mathbf{t}}_n)+\beta_n(r_n-r^*)\leqslant 0)\\
&\leqslant P(\min_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}}(\mathrm{K}_n(\hat{\mathbf{t}}_n)+\mathrm{V}_n(\hat{\mathbf{t}}_n)+\mathrm{W}_n(\hat{\mathbf{t}}_n))+\beta_n(\hat{r}_n-r^*)\leqslant 0).
\end{aligned}
$$

注意到由 (4.3.3), 对任意 $\delta>0$, 成立

$$
\lim_{n\to\infty}P(\sup_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}}|\mathrm{V}_n(\mathbf{t})|\geqslant\delta\beta_n)=0. \tag{4.3.6}
$$

首先假设 $r<r^*$. 当 $r<r^*$ 时有 $\frac{1}{n}\|\hat{\mathbf{t}}_n-\mathbf{t}^*\|_\infty\geqslant\frac{\triangle_\tau^*}{r^*}$, 因此 $\mathrm{K}_n(\hat{\mathbf{t}}_n)\geqslant\frac{\triangle_\tau^*}{r^*}\underline{\lambda}^2$. 那么，对任意 $r<r^*$,

$$
\begin{aligned}
&P(\hat{r}_n=r)\\
\leqslant\ & P(\min_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}}(\mathrm{V}_n(\mathbf{t})+\mathrm{W}_n(\mathbf{t}))+\frac{\triangle_\tau^*}{2r^*}\underline{\lambda}^2-\beta_n(r^*-r)\leqslant 0)\\
\leqslant\ & P(\max_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}}|\mathrm{V}_n(\mathbf{t})|\geqslant\frac{\triangle_\tau^*}{2r^*}\underline{\lambda}^2)+P(\max_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}}|\mathrm{W}_n(\mathbf{t})|\geqslant\beta_n(r^*-r))\\
\leqslant\ & P\Big(2n^{-2}\triangle_n^{-1}(r+1)\big(\max_{1\leqslant s\leqslant n}(\sum_{t=1}^{s}X_t)^2+\max_{1\leqslant s\leqslant n}(\sum_{t=n-s}^{s}X_t)^2\big)\geqslant\frac{\triangle_\tau^*}{2r^*}\underline{\lambda}^2\Big)\\
&+P\Big(3n^{-1}(r+1)^2\overline{\lambda}\big(\max_{1\leqslant s\leqslant n}|\sum_{t=1}^{s}X_t|+\max_{1\leqslant s\leqslant n}|\sum_{t=n-s}^{s}X_t|\big)\geqslant\beta_n(r^*-r)\Big)\\
\leqslant\ & P\Big(\big(\max_{1\leqslant s\leqslant n}(\sum_{t=1}^{s}X_t)^2+\max_{1\leqslant s\leqslant n}(\sum_{t=n-s}^{s}X_t)^2\big)\geqslant C\frac{1}{r^*}\triangle_\tau^*\underline{\lambda}^2\triangle_n n^2\Big)\\
&+P\Big(\big(\max_{1\leqslant s\leqslant n}|\sum_{t=1}^{s}X_t|+\max_{1\leqslant s\leqslant n}|\sum_{t=n-s}^{s}X_t|\big)\geqslant\frac{C\beta_n(r^*-r)n}{(r+1)^2\overline{\lambda}}\Big),
\end{aligned}
$$

这样由引理 4.2.2, 我们得到当 $n \to \infty$ 时 $P(\hat{r}_n = r) \to 0$.

另一方面，对任意 $r^* \leqslant r \leqslant R$, 有

$$P(\hat{r}_n = r) \leqslant P(\min_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}} (\mathrm{V}_n(\mathbf{t})+\frac{\beta_n}{2}) \leqslant 0)+P(\min_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}} (\mathrm{W}_n(\mathbf{t})+\mathrm{K}_n(\mathbf{t})) \geqslant \frac{\beta_n}{2}). \quad (4.3.7)$$

由 (4.3.6), (4.3.7) 右边第一式当 $n \to \infty$ 时趋向于 0. 第二式需额外条件，对任意 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{n,r}$, 我们有

$$\mathrm{K}_n(\mathbf{t}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r+1}\sum_{i=1}^{r^*+1}\sum_{j=1}^{r^*+1}\frac{n_{ki}n_{kj}}{n_k}\lambda_{ij}^2, \quad \mathrm{W}_n(\mathbf{t}) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{r+1}\sum_{i=1}^{r^*+1}\sum_{j=1}^{r^*+1}\frac{n_{ki}}{n_k}\lambda_{ij}S_{kj},$$

其中 $\lambda_{ij} \triangleq |\mu_i^* - \mu_j^*|$. 那么对任意 $1 \leqslant k \leqslant r$ 以及任意 $1 \leqslant i, j \leqslant r^*$, 令

$$\mathcal{C}_{kj} = \{\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{n,r}, n_{kj} \geqslant n\beta_n\}, \quad \overline{\mathcal{C}_{kj}} = \{\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{n,r}, n_{kj} \leqslant n\beta_n\}.$$

由引理 4.2.2 和引理 4.3.1, 存在两常数 A_1, A_2, 使得对任意 $C > 0$, 任意 $1 \leqslant k \leqslant r$ 以及 $1 \leqslant i, j \leqslant r^*$, 满足 $\lambda_{ij} > 0$, 有

$$\begin{aligned} P(\min_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}_{kj}} \frac{n_{ki}}{nn_k}(\mu_i^* - \mu_j^*)S_{kj} + C(\mathrm{K}_n(\mathbf{t}) + \beta_n) \leqslant 0) &\leqslant P(\max_{n_{kj}\geqslant n\beta_n} \frac{|S_{kj}|}{n_{kj}} \geqslant C\lambda_{kj}) \\ &\leqslant \frac{A_1}{C^2}\frac{1}{n\beta_n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\min_{\mathbf{t}\in\overline{\mathcal{C}_{kj}}} \frac{n_{ki}}{nn_k}(\mu_i^* - \mu_j^*)S_{kj} + C(\mathrm{K}_n(\mathbf{t}) + \beta_n) \leqslant 0) &\leqslant P(\max_{n_{kj}\leqslant n\beta_n} |S_{kj}| \geqslant \frac{C}{\lambda_{ij}}n\beta_n) \\ &\leqslant \frac{A_2}{C^2}\frac{1}{n\beta_n}. \end{aligned}$$

因此由 $n\beta_n \to +\infty$, 我们得到

$$\lim_{n\to\infty} P(\min_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}} (\mathrm{W}_n(\mathbf{t}) + \mathrm{K}_n(\mathbf{t})) \geqslant \frac{\beta_n}{2}) = 0.$$

最后，对任意 $0 \leqslant r \leqslant R$ 以及 $r \neq r^*$, 当 $n \to \infty$ 时， $P(\hat{r}_n = r) \to 0$ 成立. (ii) 和 (iii) 证明相似.

§4.3.5 定理 4.3.5 的证明

定理 4.3.5 **的证明** 定义 $\Delta_\tau^* = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant r+1}|\tau_j^* - \tau_{j-1}^*|$ 以及令 $0<\gamma<1/2$. 定义

$$\mathcal{C}_{\delta,\gamma,n} = \{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}, \delta\underline{\lambda}^{-2}\leqslant\|\mathbf{t}-\mathbf{t}^*\|_\infty\leqslant n\gamma\Delta_\tau^*\}, \tag{4.3.8}$$

因此证明的关键就在于决定 $P(\hat{\mathbf{t}}_n\in\mathcal{C}_{\delta,\gamma,n})$ 的上界. 首先将 $\mathcal{C}_{\delta,\gamma,n}$ 分解成以下形式

$$\mathcal{C}_{\delta,\gamma,n} = \bigcup_{\mathcal{T}}\mathcal{C}_{\delta,\gamma,n}\cap\{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}, t_k\geqslant t_k^*, \forall k\in\mathcal{T}\} \tag{4.3.9}$$

其中并集是集合 $\{1,\cdots,r\}$ 上的所有子集 $\mathcal{T}$ 的并.

我们将在每个单独的集合 $\mathcal{C}_{\delta,\gamma,n}\cap\{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}, t_k\geqslant t_k^*, \forall k\in\mathcal{T}\}$ 上计算上界. 当然, 这个上界并不依赖于集合 $\mathcal{T}$, 且考虑到符号的记法简便, 我们仅考虑 $\mathcal{T}=\{1,\cdots,r\}$ 的情况. 定义 $\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}=\mathcal{C}_{\delta,\gamma,n}\cap\{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}, t_k\geqslant t_k^*, \forall k\in\{1,\cdots,r\}\}$. 因此, 现在关键就是证明 $P(\hat{\mathbf{t}}_n\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n})$ 的上界.

首先, 我们将集合 $\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}$ 分解为 $\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}=\bigcup_{\mathcal{T}}\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}(\mathcal{T})$, 其中并集为 $\{1,\cdots,r\}$ 上的所有子集 $\mathcal{T}$ 的并, 且

$$\begin{aligned}\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}(\mathcal{T}) = \quad & \{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{n,r}, \delta\underline{\lambda}^{-2}\leqslant t_k-t_k^*\leqslant n\gamma\Delta_\tau^*, \forall k\in\mathcal{T},\\ & 0\leqslant t_k-t_k^*\leqslant\delta\underline{\lambda}^{-2}, \forall k\notin\mathcal{T}\}.\end{aligned}$$

对于任意的 $\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}$, 定义 $n_{k,k}=t_k^*-t_{k-1}, n_{k,k+1}=t_k-t_k^*, n_k=t_k-t_{k-1}$ 及 $n_k^*=t_k^*-t_{k-1}^*$, 这些数量在 $\mathbf{t}$ 和 $\mathbf{t}^*$ 上的联系是明确的. 注意到 $n_k=n_{k,k}+n_{k,k+1}$ 和 $n_k^*=n_{k,k}+n_{k-1,k}$, 以及 $n_{k,k}/n_k\geqslant(1-\gamma)\Delta_\tau^*$.

对所有的 $\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}$, 定义下列等式

$$\mathrm{J}_n(\mathbf{t}) \quad = \quad \mathrm{Q}_n(\mathbf{t})-\mathrm{Q}_n(\mathbf{t}^*), \tag{4.3.10}$$

$$\mathrm{K}_n(\mathbf{t}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{n_{k,k}n_{k,k+1}}{n_k}\lambda_k^2, \tag{4.3.11}$$

$$\mathrm{V}_n(\mathbf{t}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}n_{k,k+1}\Big(\frac{n_{k,k}}{n_k}\Big(\frac{S_{k,k}}{n_{k,k}}-\frac{S_{k,k+1}}{n_{k,k+1}}\Big)^2 - \frac{n_{k+1,k+1}}{n_{k+1}^*}\Big(\frac{S_{k+1,k+1}}{n_{k+1,k+1}}-\frac{S_{k,k+1}}{n_{k,k+1}}\Big)^2\Big), \tag{4.3.12}$$

$$\mathrm{W}_n(\mathbf{t}) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\Big(n_{k,k+1}\frac{S_{k,k}}{n_k}+\frac{n_{k,k}}{n_k}S_{k,k+1}\Big), \tag{4.3.13}$$

其中，对 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r+1, S_{i,j} = \sum_{t=t_{i-1}+1}^{t_j} X_t$ 以及 $\lambda_k = \mu_{k+1}^* - \mu_k^*$. 从上可知，对所有的 $\mathbf{t} \in \mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}$, $\mathrm{J}_n(\mathbf{t})$ 可被分解为

$$\mathrm{J}_n(\mathbf{t}) = \mathrm{K}_n(\mathbf{t}) + \mathrm{V}_n(\mathbf{t}) + \mathrm{W}_n(\mathbf{t}).$$

而我们有对所有的 $\mathbf{t} \in \mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}$,

$$\min_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}} \mathrm{K}_n(\mathbf{t}) \geqslant (1-\gamma)\Delta_\tau^*\delta \tag{4.3.14}$$

以及

$$\mathrm{V}_n(t) \geqslant -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\Big(n_{k,k+1}\frac{S_{k+1,k+1}^2}{n_{k+1,k+1}^2}+\frac{S_{k,k+1}^2}{n_k}+2|S_{k,k+1}|\Big(\frac{|S_{k+1,k+1}|}{n_{k+1,k+1}}+\frac{|S_{k,k}|}{n_{k,k}}\Big)\Big). \tag{4.3.15}$$

那么由 (4.3.10)–(4.3.15), $\mathrm{K}_n(\mathbf{t}), \mathrm{V}_n(\mathbf{t})$ 和 $\mathrm{W}_n(\mathbf{t})$ 的表达式及它们的界，存在足够小的 $C > 0$, 使得以下不等式成立

$$\begin{aligned} & P(\hat{\mathbf{t}}_n \in \mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}) \\ \leqslant\ & P(\min_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}} (\mathrm{K}_n(\mathbf{t}) + \mathrm{V}_n(\mathbf{t}) + \mathrm{W}_n(\mathbf{t})) \leqslant 0) \end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{r} P(\max_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}(\mathcal{T})} \frac{S^2_{k+1,k+1}}{n^2_{k+1,k+1}} \geqslant C(1-\gamma)\Delta^*_\tau \underline{\lambda}^2)$$

$$+\sum_{k\in\mathcal{T}} P(\max_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}(\mathcal{T})} \frac{S^2_{k,k+1}}{n_{k,k+1}} \geqslant C(1-\gamma)n\Delta^*_\tau \underline{\lambda}^2)$$

$$+\sum_{k\notin\mathcal{T}} P(\max_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}(\mathcal{T})} \frac{S^2_{k,k+1}}{n_k} \geqslant C(1-\gamma)\Delta^*_\tau \delta)$$

$$+\sum_{k\in\mathcal{T}} P(\max_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}(\mathcal{T})} \frac{|S_{k,k+1}|}{n_{k,k+1}}(\frac{|S_{k+1,k+1}|}{n_{k+1,k+1}}+\frac{|S_{k,k}|}{n_{k,k}}) \geqslant C(1-\gamma)\Delta^*_\tau \underline{\lambda}^2)$$

$$+\sum_{k\notin\mathcal{T}} P(\max_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}(\mathcal{T})} |S_{k,k+1}|(\frac{|S_{k+1,k+1}|}{n_{k+1,k+1}}+\frac{|S_{k,k}|}{n_{k,k}}) \geqslant C(1-\gamma)\Delta^*_\tau \delta)$$

$$+\sum_{k=1}^{r} P(\max_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}(\mathcal{T})} \frac{|S_{k,k}|}{n_{k,k}} \geqslant C\underline{\lambda})$$

$$+\sum_{k\in\mathcal{T}} P(\max_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}(\mathcal{T})} \frac{|S_{k,k+1}|}{n_{k,k+1}} \geqslant C\underline{\lambda})$$

$$+\sum_{k\notin\mathcal{T}} P(\max_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}(\mathcal{T})} |S_{k,k+1}| \geqslant C(1-\gamma)\Delta^*_\tau \delta\overline{\lambda}^{-1}).$$

那么我们可以得到 $\mathrm{J}_n(\mathbf{t})$ 在 $\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}$ 上的界. 首先, 由引理 4.2.2 及引理 4.3.1, 存在有限的常数 C_1, C_2 满足对所有的 $1\leqslant k\leqslant r$ 及所有的 $C>0$,

$$P(\max_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}} \frac{|S_{k,k}|}{n_{k,k}} \geqslant C) \leqslant P(\sup_{s\geqslant n(1-\gamma)\Delta^*_\tau} \frac{|\sum_{i=1}^{s} X_i|}{s} \geqslant C) \leqslant \frac{C_1}{C^2 n}, \tag{4.3.16}$$

$$P(\max_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}} \frac{S^2_{k,k+1}}{n_{k,k+1}} \geqslant C) \leqslant P(\sup_{s\leqslant n}|\sum_{i=1}^{s} X_i| \geqslant \sqrt{n(1-\gamma)C\Delta^*_\tau}) \leqslant \frac{C_2}{C}. \tag{4.3.17}$$

接着, 存在有限的常数 C_3, C_4 (不依赖与 $\underline{\lambda}, \overline{\lambda}$, 及子集 $\mathcal{T}$) 满足对所有的 $n\geqslant 1$,

$$P(\max_{k\in\mathcal{T}} \max_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}(\mathcal{T})} \frac{|S_{k,k+1}|}{n_{k,k+1}} \geqslant C) \leqslant P(\sup_{s\geqslant\delta\underline{\lambda}^{-2}} \frac{|\sum_{i=1}^{s} X_i|}{s} \geqslant C) \leqslant \frac{C_3\underline{\lambda}^2}{\delta C^2}, \tag{4.3.18}$$

$$P(\max_{k\notin T}\max_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n}(T)}|S_{k,k+1}|\geqslant C)\leqslant P(\max_{k\notin T}\max_{0\leqslant s\leqslant\delta\underline{\lambda}^{-2}}|\sum_{i=1}^{s}X_i|\geqslant C)$$

$$\leqslant\frac{C_4\delta}{C^2\underline{\lambda}^2}.\tag{4.3.19}$$

那么由 (4.3.16)–(4.3.19), 有对任意的 $\delta>0$,

$$P(\hat{\mathbf{t}}_n\in\mathcal{C}'_{\delta,\gamma,n})\leqslant K_\gamma(\frac{2}{n\underline{\lambda}^2}+\frac{1}{\delta}(6+(\frac{\overline{\lambda}}{\underline{\lambda}})^2)),$$

其中 $K_\gamma<\infty$ 为以常数. 因此当 $n\underline{\lambda}^2\to\infty$ 及 $\delta\to\infty$ 时, 结论成立.

§4.3.6 其他相依假设

假设 $\{\varepsilon_t;t\in Z^+\}$ 为满足 $E\varepsilon_t=0$, $0<E\varepsilon_t^2<\infty$ 的平稳随机变量序列. 从以上证明看出, 关键是只要有 (4.2.8), 就有 (4.2.9) 成立. 那么在 (4.2.8) 的条件下, 第二节定理 4.2.1–4.2.3 以及第三节定理 4.3.1–4.3.5 都成立. 因此, 如果满足以下的条件之一, 定理 4.2.1–4.3.5 成立:

(i) $\{\varepsilon_t;t\in Z^+\}$ 为鞅差序列.

(ii) $\{\varepsilon_t;t\in Z^+\}$ 为一 ρ- 混合 (或 φ- 混合) 随机变量序列, 满足 $\sum_{i=1}^{\infty}\rho(2^i)<\infty$ (或者 $\sum_{i=1}^{\infty}\varphi^{\frac{1}{2}}(2^i)<\infty$).

(iii) $\{\varepsilon_t;t\in Z^+\}$ 为满足 $E|\varepsilon_t|^{2+\delta}<\infty$ 以及对某个 $\delta>0$ 和 $\theta>\dfrac{2+\delta}{\delta}$, $\alpha(n)=O(n^{-\theta})$ 的 α- 混合随机变量序列.

(iv) $\{\varepsilon_t;t\in Z^+\}$ 为负相伴随机变量序列.

(v) $\{\varepsilon_t;t\in Z^+\}$ 为相伴随机变量序列.

证明为定理 1.3.1 的一部分, 故省略.

第四节 在长程相依的假设下线性过程变点估计的极限性质

§4.4.1 模型及介绍

本章的第二节和第三节分别讨论了在短程相依的假设下线性过程的单变点和多变点估计的各种极限性质. 然而相对于短程相依, 对长程相依随机过程的各种研究则是一个比较新的热门方向. 本节的任务就是对长程相依过程进行变点的研究和讨论. 利用弱或强不变原理对观测序列进行逼近检验是变点分析中一种很重要的工具. 当弱不变原理成立时, Horváth (2000) 讨论了短程相依假设下变点估计的逼近 CUSUM 检验. 本节的主要目的就是在弱不变原理成立的条件下, 对长程相依过程进行均值和方差的基于最小二乘残差的逼近 CUSUM 检验.

令 $\{\varepsilon_k, -\infty < k < \infty\}$ 为 i.i.d. 随机变量序列以及 $\{a_k, k \geqslant 0\}$ 为一实数序列满足

$$a_k \sim C_0 k^{-\alpha} \quad 对某个 \quad 1/2 < \alpha < 1, \tag{4.4.1}$$

其中 $a_n \sim b_n$ 定义为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$. 令 $\{e_j, j \geqslant 0\}$ 为形如 (4.2.2) 的线性过程. 在时间序列的分析中, 这类过程的研究非常关键. 许多重要的时间序列模型, 比如表示因果关系的 ARMA 过程, 当系数满足 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$ 时, 就有线性过程

(4.2.2) 的形式. 众所周知，当系数等价于 $a_k \sim C_0 k^{-\alpha}$ 时，其中若 $1/2 < \alpha < 1$，过程 (4.2.2) 可视为长记忆过程，而 $0 < \alpha < 1/2$ 时，则看作短记忆过程.

系数满足 (4.4.1) 的长记忆过程还包括了非常著名的分数积分过程，定义如下：

$$(1-B)^d Y_j = \varepsilon_j, \qquad j = 1, 2, \cdots, \tag{4.4.2}$$

其中 B 为滞后算子. 此处，分数差分算子 $(1-B)^d$ 由它的 Maclaurin 序列所定义：

$$(1-B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-d+k)}{\Gamma(-d)\Gamma(k+1)} B^j \quad \text{其中} \quad \Gamma(z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} s^{z-1} e^{-z} \mathrm{d}s & \text{若 } z > 0, \\ \infty & \text{若 } z = 0. \end{cases}$$

若 $z < 0$, $\Gamma(z)$ 定义为递归公式 $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$. 因此， (4.4.2) 可记为

$$Y_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-d+k)}{\Gamma(-d)\Gamma(k+1)} \varepsilon_{j-k}.$$

注意到 $\dfrac{\Gamma(-d+k)}{\Gamma(-d)\Gamma(k+1)} \sim k^{d-1}/\Gamma(d)$. 显然，分数积分过程为长记忆模型 (4.2.2) 当系数取 $a_k = \dfrac{\Gamma(-d+k)}{\Gamma(-d)\Gamma(k+1)}$, $\alpha = 1-d$ 及 $C_0 = 1/\Gamma(d)$, 其中 $0 < d < 1/2$ 时的一个特殊情况.

当噪声 (或误差) 服从分数积分过程时， Hidalgo 和 Robinson (1996) 给出了在线性回归中对给定时间点的变点参数值的检验， Kuan 和 Hsu (1998) 讨论了均值的变点估计，以及 Wright (1998) 对多项式回归模型进行了变点参数值的检验.

本节主要考虑噪声满足 (4.2.2) 的过程 (4.4.1). 模型定义如下：

$$S(t) = \begin{cases} \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant t} X_j, & 0 \leqslant t \leqslant T^* \\ S(T^*) + \sum\limits_{T^* < j \leqslant t} X_j, & T^* < t \leqslant T \end{cases}, \tag{4.4.3}$$

其中

$$X_j = \begin{cases} \mu + \sigma e_j, & 0 \leqslant j \leqslant T^* \\ \mu^* + \sigma^* e_j, & T^* < j \leqslant T \end{cases}, \tag{4.4.4}$$

以及 $\{e_j, j \geqslant 0\}$ 为系数满足 (4.4.1) 的过程 (4.2.2).

观测 $\{S(t), 0 \geqslant t \geqslant T\}$, 我们希望检验在 $[0,T]$ 上过程关于均值或方差的可能变点. 首先假设 $\mu \neq \mu^*$. 在子节 4.4.2.1 中我们建立了对于原假设 H_0 的 CUSUM 检验:

$$H_0 : T^* = T \quad (\text{在}[0,T]\text{上无变点})$$

相对于备择假设

$$H_1 : 0 < T^* < T \text{ 及 } \mu \neq \mu^* \quad (\text{存在均值变点}T^* \in (0,T)).$$

定理 4.4.1 给出了 CUSUM 统计量的极限分布, 从而由此可以计算渐近的临界值. 此外还讨论了方差的估计.

在子节 4.4.2.2 中我们考虑了当 $\sigma \neq \sigma^*$ 时的情况. 与检验均值中可能的变点相似, 渐近检验主要由原假设 H_0 相对于备择假设 H_2 给出:

$$H_2 : 0 < T^* < T \text{ 及 } \sigma \neq \sigma^* \quad (\text{存在方差变点}T^* \in (0,T)).$$

§4.4.2 主要结果

在给出主要结果之前, 我们先定义一种在 $D[0,1]$ 上满足 $-1/2 < d < 1/2$ 的分数布朗运动 (参见 Mandelbrot 和 Van Ness (1968)):

$$W_d(t) = \frac{1}{A(d)} \int_{-\infty}^{0} [(t-s)^d - (-s)^d] dW(s) + \int_0^t (t-s)^d dW(s), \tag{4.4.5}$$

其中 $W(s)$ 为标准布朗运动以及

$$A(d) = \left(\frac{1}{2d+1} + \int_0^\infty [(1+s)^d - s^d]^2 \mathrm{d}s \right)^{1/2}.$$

§4.4.2.1 均值变点的检验

假设观测 $\{S(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 于点 $t_i = t_{i,N} = iT/N, 1 \leqslant i \leqslant N$. 令 $S_0 = 0, S_i = S(t_i)$, $R_i = S_i - S_{i-1}, 1 \leqslant i \leqslant N$ 及 $S_0^* = 0$,

$$S_m^* = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} R_i - \frac{m}{N} \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} R_i, \quad 1 \leqslant m \leqslant N. \tag{4.4.6}$$

定义 CUSUM 统计量为

$$M_T = T^{-H} \tau^{-1} \max_{1 \leqslant m \leqslant N} |S_m^*|, \tag{4.4.7}$$

其中 $\tau = \sigma K_\alpha$, $K_\alpha^2 = C_0^2 c_\alpha (1-\alpha)^{-1}(3-2\alpha)^{-1}$, $c_\alpha = \int_0^\infty x^{-\alpha}(x+1)^{-\alpha} \mathrm{d}x$ 及 $H = 3/2 - \alpha$, $1/2 < \alpha < 1$. 以下的定理给出了当 $T \to \infty$ 时统计量的极限性质.

定理 4.4.1 令 $\{\varepsilon_k, -\infty < k < \infty\}$ 为 *i.i.d.* 随机变量序列满足 $E\varepsilon_0 = 0, E\varepsilon_0^2 = 1$, 对某个 $p > 2$, $E|\varepsilon_0|^p < \infty$ 以及 $\{a_k, k \geqslant 0\}$ 为满足 *(4.4.1)* 的实数序列. 给定模型 *(4.4.3)*, 其中 X_j 定义如 *(4.4.4)*. 那么在 H_0 的假设下, 对于当 $T \to \infty$, $N = N(T) \to \infty$ 时, 有

$$M_T \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |W_{1-\alpha}(t) - tW_{1-\alpha}(1)| \quad 当 \ T \to \infty. \tag{4.4.8}$$

特别地, 当 τ^2 为未知值时, 需要由一相合估计代替. 定义估计 τ^2 为

$$\hat{\tau}_T^2 = \frac{N^{2H}}{NT^{2H}} \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} (R_i - \frac{T}{N} \hat{\mu}_T)^2, \tag{4.4.9}$$

其中

$$\hat{\mu}_T = \frac{1}{T} \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} R_i.$$

令

$$\hat{M}_T = T^{-H} \hat{\tau}_T^{-1} \max_{1 \leqslant m \leqslant N} |S_m^*|. \tag{4.4.10}$$

那么以下定理则讨论了 $\hat{M}_T$ 的极限分布.

定理 4.4.2 给定模型 *(4.4.3)*. 假定满足定理 *4.4.1* 中的假设. 假设当 $T\to\infty$ 时, $N=N(T)\to\infty$ 以及对某个 $p>2$, $N^{2H}=o(T^{1-2/p})$. 那么在 H_0 的假设下, 有

$$\hat{M}_T \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|W_{1-\alpha}(t)-tW_{1-\alpha}(1)| \quad 当\ T\to\infty. \tag{4.4.11}$$

接下来, 我们还讨论了在备择假设 H_1 下, 当 $T\to\infty$ 时, 检验统计量 $\hat{M}_T$ 极限性质.

定理 4.4.3 给定模型 *(4.4.3)*. 假定满足定理 *4.4.1* 中的假设. 假设当 $T\to\infty$ 时, $N=N(T)\to\infty$ 以及 $N^{2H}=o(T^{1-2/p})$, 其中 p 满足 $p>2$ 及 $p(1-\alpha)\leqslant 1$. 那么在 H_1 的假设下, 若

$$\frac{|\mu-\mu^*|N^{1-H}T^*(T-T^*)}{T^2}\to\infty \ 当\ T\to\infty, \tag{4.4.12}$$

则

$$\hat{M}_T \xrightarrow{P} \infty.$$

我们注意到在定理 4.4.3 中对 $\tau=\sigma K_\alpha$ 及 $\tau^*=\sigma^*K_\alpha$ 没有任何假设. 这说明不管方差变或不变, 相合性都成立.

例如, 若假设对某个 $0<\theta<1$, $T^*=[T\theta]$, 那么定理 4.4.3 中的条件满足, 若当 $T\to\infty$ 时, $N\to\infty$, $N^{2H}=o(T^{1-2/p})$ 以及 $|\mu-\mu^*|N^{1-H}\to\infty$.

§4.4.2.2 方差变点的检验

此检验主要基于部分和 $\widetilde{R}_i^2=(S_i-S_{i-1}-\mu T/N)^2, 1\leqslant i\leqslant N$, 其中 $\{S_i, 1\leqslant i\leqslant N\}$ 与子节 4.4.2.1 中定义相同. 令 $\widetilde{S}_0=0$ 及

$$\widetilde{S}_m=\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\widetilde{R}_i^2-\frac{m}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\widetilde{R}_i^2,\quad 1\leqslant m\leqslant N. \tag{4.4.13}$$

首先，我们讨论统计量 $\widetilde{M}_T$ 的渐近性质,

$$\widetilde{M}_T=\frac{N^H}{\tau^2T^{2H}}\max_{1\leqslant m\leqslant N}|\widetilde{S}_m|. \tag{4.4.14}$$

注意 τ 的定义已在 (4.4.7) 中给出.

定理 4.4.4 *给定模型 (4.4.3). 假定满足定理 4.4.1 中的假设. 那么在 H_0 的假设下, 对于当 $T\to\infty$ 时, $N=N(T)\to\infty$ 以及 $N=o(T^{1/2-1/p}), p>2$, 有*

$$\widetilde{M}_T=o_p(1),\quad T\to\infty. \tag{4.4.15}$$

特别地，μ 和 τ^2 的值往往是未知的. 在统计量 $\widetilde{M}_T$ 的定义中，需要由合适的估计来代替. 回忆子节 4.4.2.1. 估计 μ 和 τ^2 分别定义为

$$\hat{\mu}_T=\frac{1}{T}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}R_i$$

以及

$$\hat{\tau}_T^2=\frac{N^{2H}}{NT^{2H}}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}(R_i-\frac{T}{N}\hat{\mu}_T)^2.$$

令 $\hat{R}_i^2=(S_i-S_{i-1}-\hat{\mu}_TT/N)^2, 1\leqslant i\leqslant N$ 及

$$\hat{S}_m=\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\hat{R}_i^2-\frac{m}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\hat{R}_i^2,\quad 1\leqslant m\leqslant N. \tag{4.4.16}$$

接着，在 H_0 的假设下，我们讨论统计量 $\widetilde{M}_T^*$ 的渐近性质,

$$\widetilde{M}_T^*=\frac{N^H}{\hat{\tau}_T^2T^{2H}}\max_{1\leqslant m\leqslant N}|\hat{S}_m|. \tag{4.4.17}$$

定理 4.4.5 给定模型 *(4.4.3)*. 假定满足定理 *4.4.1* 中的假设. 那么在 H_0 的假设下, 对于当 $T \to \infty$ 时, $N = N(T) \to \infty$ 以及 $N = o(T^{1/2-1/p}), p > 2$, 有

$$\widetilde{M}_T^* = o_p(1), \quad T \to \infty. \tag{4.4.18}$$

最后, 讨论在 H_2 的假设下, 统计量 $\widetilde{M}_T^*$ 的极限性质.

定理 4.4.6 给定模型 *(4.4.3)*. 假定满足定理 *4.4.1* 中的假设. 那么在 H_2 的假设下, 若 $\mu = \mu^*$, 当 $T \to \infty$ 时, $N = N(T) \to \infty$, $NT^*/T \to \infty$, $N(T-T^*)/T \to \infty$, 对某个 $p > 2$, $N = o(T^{1/2-1/p})$ 以及

$$\frac{|\sigma^2 - \sigma^{*2}| N^{1-H} T^*(T-T^*)}{T^2} \to \infty \text{ as } T \to \infty, \tag{4.4.19}$$

有

$$\widetilde{M}_T^* \xrightarrow{P} \infty.$$

例如, 若我们假设对某个 $0 < \theta < 1$, $T^* = [T\theta]$, 定理 4.4.6 的充分条件则为 $N = N(T) \to \infty$, $N = o(T^{1/2-1/p})$ 以及 $N^{1-H}|\sigma^2 - \sigma^{*2}| \to \infty$.

§4.4.3 定理的证明

以下的引理是定理 4.4.1 ~ 定理 4.4.6 的证明非常有用的工具. (参见 Wang (2003)).

引理 4.4.1 令 $\{\varepsilon_k, -\infty < k < \infty\}$ 为 *i.i.d.* 随机变量序列满足 $E\varepsilon_0 = 0, E\varepsilon_0^2 = 1$ 以及对某个 $p > 2$, $E|\varepsilon_0|^p < \infty$, $\{a_k, k \geqslant 0\}$ 为满足 *(4.4.1)* 的实数

序列. 那么 $\{\varepsilon_k, -\infty < k < \infty\}$ 在合适的概率空间, 可建立一分数布朗运动 $\{W_{1-\alpha}(t), 0 \leqslant t < \infty\}$ 满足当 $T \to \infty$ 时,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|K_\alpha^{-1}\sum_{0\leqslant j\leqslant t} e_j - W_{1-\alpha}(t)\right| = O_p(T^{1+1/p-\alpha}), \tag{4.4.20}$$

其中 $K_\alpha^2 = C_0^2 c_\alpha (1-\alpha)^{-1}(3-2\alpha)^{-1}$, 对 $1/2 < \alpha < 1$, $c_\alpha = \int_0^\infty x^{-\alpha}(x+1)^{-\alpha}\mathrm{d}x$.

定理 4.4.1 **的证明** 注意到在 H_0 的假设下, $\mu = \mu^*$ 及 $\sigma = \sigma^*$. 我们有

$$\begin{aligned} S_m^* &= \sum_{1\leqslant i\leqslant m} R_i - \frac{m}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant N} R_i = S_m - \frac{m}{N}S_N \\ &= S(\frac{mT}{N}) - \frac{m}{N}S(T) = \sum_{0\leqslant j\leqslant \frac{mT}{N}} X_j - \frac{m}{N}\sum_{0\leqslant j\leqslant T} X_j \\ &= \sum_{0\leqslant j\leqslant \frac{mT}{N}} (\mu+\sigma e_j) - \frac{m}{N}\sum_{0\leqslant j\leqslant T}(\mu+\sigma e_j) \\ &= \sigma(\sum_{0\leqslant j\leqslant \frac{mT}{N}} e_j - \frac{m}{N}\sum_{0\leqslant j\leqslant T} e_j). \end{aligned}$$

运用引理 4.4.1, 得到当 $T \to \infty$ 时,

$$\max_{1\leqslant m\leqslant N}\left|S_m^* - \tau\{W_{1-\alpha}(\frac{mT}{N}) - \frac{m}{N}W_{1-\alpha}(T)\}\right| = O_p(T^{1+1/p-\alpha}).$$

由分数布朗运动 (4.4.5) 的自适应性, 有

$$B^{-(d+1/2)}W_d(Bt) \stackrel{\mathcal{D}}{=} W_d(t),$$

即,

$$B^{-H}W_{1-\alpha}(Bt) \stackrel{\mathcal{D}}{=} W_{1-\alpha}(t), \tag{4.4.21}$$

其中 $H = 3/2 - \alpha$. 那么,

$$\begin{aligned} &\left\{T^{-H}(W_{1-\alpha}(\frac{[xN]}{N}T) - \frac{[xN]}{N}W_{1-\alpha}(T)),\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1\right\} \\ \stackrel{\mathcal{D}}{=}\ &\left\{W_{1-\alpha}(\frac{[xN]}{N}) - \frac{[xN]}{N}W_{1-\alpha}(1),\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1\right\}. \end{aligned} \tag{4.4.22}$$

因此由 $W_{1-\alpha}(u)$ 的几乎处处连续性, 对 $p>2$, 可得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|T^{-H}\tau^{-1}S^*_{[Nx]}-T^{-H}\big(W_{1-\alpha}(xT)-xW_{1-\alpha}(T)\big)\right|\\
\leqslant\ & T^{-H}\tau^{-1}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|S^*_{[Nx]}-\tau\big(W_{1-\alpha}(\frac{[Nx]}{N}T)-\frac{[Nx]}{N}W_{1-\alpha}(T)\big)\right|\\
&+\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|T^{-H}\big(W_{1-\alpha}(\frac{[Nx]}{N}T)-\frac{[Nx]}{N}W_{1-\alpha}(T)\big)\right.\\
&\left.-T^{-H}\big(W_{1-\alpha}(xT)-xW_{1-\alpha}(T)\big)\right|\\
=\ & O_p(T^{1+1/p-\alpha-H})+o_p(1)\\
=\ & O_p(T^{1/p-1/2})+o_p(1)=o_p(1).
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\{W_{1-\alpha}(x)-xW_{1-\alpha}(1),0\leqslant x\leqslant 1\}\overset{\mathcal{D}}{=}\{T^{-H}\big(W_{1-\alpha}(xT)-xW_{1-\alpha}(T)\big),0\leqslant x\leqslant 1\}.
$$

此定理证明完毕.

定理 4.4.2 的证明 只需证明当 $T\to\infty$ 时,

$$
\hat{\tau}_T^2\xrightarrow{P}\tau^2. \tag{4.4.23}
$$

首先, 由引理 4.4.1 及 $T^{-H}W_{1-\alpha}(T)\overset{\mathcal{D}}{\sim}N(0,1)$ 的事实, 在 H_0 的假设下, 得

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu}_T &= \frac{1}{T}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}R_i=\frac{S(T)}{T}=\frac{1}{T}\sum_{0\leqslant j\leqslant T}X_j\\
&= \frac{1}{T}\sum_{0\leqslant j\leqslant T}(\mu+\sigma e_j)=\mu+\frac{\sigma}{T}\sum_{0\leqslant j\leqslant T}e_j\\
&= \mu+\frac{\tau}{T}W_{1-\alpha}(T)+O_p(T^{1/p-\alpha})\\
&= \mu+O_p(T^{1/2-\alpha}).
\end{aligned} \tag{4.4.24}
$$

不失一般性，我们假设 $\mu = 0$. 那么由 (4.4.24), 对 $1/2 < H < 1$ 有

$$
\begin{aligned}
\hat{\tau}_T^2 &= \frac{N^{2H}}{NT^{2H}} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} R_i^2 - \frac{N^{2H}T^{2-2H}}{N^2}\hat{\mu}_T^2 \\
&= \frac{N^{2H}}{NT^{2H}} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} R_i^2 + O_p(T^{2-2H+1-2\alpha}N^{2H-2}) \\
&= \frac{N^{2H}}{NT^{2H}} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} R_i^2 + O_p(N^{2H-2}) \\
&= \frac{N^{2H}}{NT^{2H}} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} R_i^2 + o_p(1). \qquad (4.4.25)
\end{aligned}
$$

记 $W_i = \tau\Big\{W_{1-\alpha}(\frac{iT}{N}) - W_{1-\alpha}(\frac{(i-1)T}{N})\Big\}$ 及 $\eta_i = R_i - W_i, 1 \leqslant i \leqslant N$. 那么

$$
\begin{aligned}
R_i &= S_i - S_{i-1} = S(\frac{iT}{N}) - S(\frac{(i-1)T}{N}) \\
&= \sigma(\sum_{0\leqslant j\leqslant \frac{iT}{N}} e_j - \sum_{0\leqslant j\leqslant \frac{(i-1)T}{N}} e_j).
\end{aligned}
$$

再运用引理 4.4.1 得到

$$
\max_{1\leqslant i\leqslant N} |\eta_i| = O_p(T^{1+1/p-\alpha}).
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&\frac{N^{2H}}{NT^{2H}} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} R_i^2 \\
= &\frac{N^{2H}}{NT^{2H}} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} (W_i + \eta_i)^2 \\
= &\frac{N^{2H}}{NT^{2H}} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} W_i^2 + \frac{2N^{2H}}{NT^{2H}} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} W_i\eta_i + \frac{N^{2H}}{NT^{2H}} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} \eta_i^2
\end{aligned}
$$

$$= \frac{N^{2H}}{NT^{2H}}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}W_i^2+\frac{2N^{2H}}{NT^{2H}}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}W_i\eta_i+O_p(N^{2H}T^{2(1+1/p-\alpha)-2H})$$

$$= \frac{N^{2H}}{NT^{2H}}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}W_i^2+\frac{2N^{2H}}{NT^{2H}}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}W_i\eta_i+O_p(N^{2H}T^{2/p-1}).$$

由 $(\frac{N}{T})^H W_i \overset{\mathcal{D}}{\sim} N(0,\tau^2)$ 的事实，我们有

$$\mathsf{E}[\sum_{1\leqslant i\leqslant N}|W_i|]=O(N^{1-H}T^H).$$

那么，

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant N}|W_i|=O_p(N^{1-H}T^H).$$

接下来我们需要证明

$$\frac{N^{2H}}{NT^{2H}}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}W_i^2-\tau^2=\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\Big((\frac{N}{T})^{2H}W_i^2-\tau^2\Big)=o_p(1). \tag{4.4.26}$$

令 $Z_i=(\frac{N}{T})^{2H}W_i^2-\tau^2$, 那么 $EZ_i=0$ 以及对 $1\leqslant i\leqslant N$, $\frac{1}{\tau^2}(\frac{N}{T})^{2H}W_i^2$ 服从 $\chi^2(1)$ 分布，得 $EZ_i^2=2\tau^4$. 那么由增量 W_i 的平稳性，我们有

$$\mathsf{Var}\Big\{\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\Big((\frac{N}{T})^{2H}W_i^2-\tau^2\Big)\Big\}=\mathsf{Var}\{\sum_{1\leqslant i\leqslant N}Z_i\}$$

$$=\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\mathsf{Var}Z_i+2\sum_{j=2}^{N}(N+1-j)\mathsf{Cov}(Z_1,Z_j)$$

$$=N\cdot EZ_1^2+2\sum_{j=2}^{N}(N+1-j)EZ_1Z_j.$$

接着，计算 EZ_1Z_j 项，

$$\begin{aligned} EZ_1Z_j &= \mathsf{Cov}\Big\{(\frac{N}{T})^{2H}W_1^2,(\frac{N}{T})^{2H}W_j^2\Big\} \\ &= 2\Big(\mathsf{Cov}\Big\{(\frac{N}{T})^{H}W_1,(\frac{N}{T})^{H}W_j\Big\}\Big)^2=2R^2\tau^4, \end{aligned}$$

其中 $R = Corr\{(\frac{N}{T})^H W_1 \cdot (\frac{N}{T})^H W_j\} = \frac{1}{\tau^2} E\{(\frac{N}{T})^H W_1 \cdot (\frac{N}{T})^H W_j\}$. 这样只需计算 R. 由分数布朗运动的性质，我们有

$$
\begin{aligned}
& E\Big\{(\frac{N}{T})^H W_1 \cdot (\frac{N}{T})^H W_j\Big\} \\
= \quad & E\Big\{(\frac{N}{T})^H \tau\Big(W_{1-\alpha}(\frac{T}{N}) - W_{1-\alpha}(0)\Big) \\
& \cdot (\frac{N}{T})^H \tau\Big(W_{1-\alpha}(\frac{jT}{N}) - W_{1-\alpha}(\frac{(j-1)T}{N})\Big)\Big\} \\
= \quad & (\frac{T}{N})^{2H} \tau^2 \Big\{E\Big(W_{1-\alpha}(\frac{T}{N}) W_{1-\alpha}(\frac{jT}{N})\Big) - E\Big(W_{1-\alpha}(\frac{T}{N}) W_{1-\alpha}(\frac{(j-1)T}{N})\Big)\Big\} \\
= \quad & \frac{\tau^2}{2}\Big(j^{2H} + (j-2)^{2H} - 2(j-1)^{2H}\Big) \overset{j\to\infty}{\sim} \tau^2 H(2H-1) j^{2H-2}.
\end{aligned}
$$

那么 $R \overset{j\to\infty}{\sim} H(2H-1)j^{2H-2}$. 则可得

$$
EZ_1 Z_j \sim \tau^4 2H^2 (2H-1)^2 j^{4H-4}.
$$

因此

$$
\mathrm{Var}\{\sum_{1\leqslant i\leqslant N} Z_i\} \sim \tau^4 (N \vee N^{4H-2}), \tag{4.4.27}
$$

那么就可推出当 $N \to \infty$ 时，

$$
\sum_{1\leqslant i\leqslant N} Z_i = o_p(N).
$$

这样 (4.4.26) 证毕.

因此我们得到

$$
\begin{aligned}
\frac{N^{2H}}{NT^{2H}} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} R_i^2 \quad &= \quad \tau^2 + o_p(1) + O_p(N^H T^{1+1/p-\alpha-H}) + O_p(N^{2H} T^{2/p-1}) \\
&= \quad \tau^2 + O_p(N^H T^{1/p-1/2}) + O_p(N^{2H} T^{2/p-1}) \\
&= \quad \tau^2 + o_p(1).
\end{aligned} \tag{4.4.28}
$$

最后综合 (4.4.25) 及 (4.4.28), 得 (4.4.23).

定理 4.4.3 的证明 首先, 注意到在 H_1 的假设下, $\mu \neq \mu^*$. 记 $m^* = [\frac{NT^*}{T}]$, 由引理 4.4.1, 我们有

$$
\begin{aligned}
S^*_{m^*} &= S(\frac{m^*T}{N}) - \frac{m^*}{N}\Big\{S(T^*) + \big(S(T) - S(T^*)\big)\Big\} \\
&= \sum_{0\leqslant j\leqslant \frac{m^*T}{N}} X_j - \frac{m^*}{N}\Big\{\sum_{0\leqslant j\leqslant T^*} X_j + \big(\sum_{0\leqslant j\leqslant T} X_j - \sum_{0\leqslant j\leqslant T^*} X_j\big)\Big\} \\
&= (\mu-\mu^*)\frac{m^*}{N}(T-T^*) + \sigma\Big\{\sum_{0\leqslant j\leqslant \frac{m^*T}{N}} e_j - \frac{m^*}{N}\sum_{0\leqslant j\leqslant T^*} e_j\Big\} \\
&\quad -\sigma^*\frac{m^*}{N}\sum_{T^*<j\leqslant T} e_j \\
&= (\mu-\mu^*)\frac{m^*}{N}(T-T^*) + \tau\Big\{W_{1-\alpha}(\frac{m^*T}{N}) - \frac{m^*}{N}W_{1-\alpha}(T^*)\Big\} \\
&\quad -\tau^*\frac{m^*}{N}W_{1-\alpha}(T-T^*) + O_p(T^{1+1/p-\alpha}).
\end{aligned}
$$

由于 $T^{-H}\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|W_{1-\alpha}(Tx)|$ 的分布不依赖于 T, 则对 $p>2$ 可得

$$
S^*_{m^*} = (\mu-\mu^*)\frac{m^*}{N}(T-T^*) + O_p(T^H). \tag{4.4.29}
$$

由假设 (4.4.19) 及 $1-H<H$, 我们有

$$
\frac{|\mu-\mu^*|T^{1/2-1/p}T^*(T-T^*)}{T^2} \to \infty.
$$

注意到条件 $p(1-\alpha)\leqslant 1$ 可推出 $1+H<3/2+1/p$. 由 (4.4.29), 立即可得

$$
S^*_{[\frac{NT^*}{T}]}\Big/\Big\{\frac{(\mu-\mu^*)T^*(T-T^*)}{T}\Big\} \xrightarrow{P} 1. \tag{4.4.30}
$$

另一方面，由 $p>2$ 及 $1/2<\alpha<1$, 有

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_T &= \frac{S(T)}{T}=\frac{S(T^*)}{T}+\frac{S(T)-S(T^*)}{T} \\
&= \mu\frac{T^*}{T}+\mu^*\frac{T-T^*}{T}+\tau\frac{W_{1-\alpha}(T^*)}{T}+\tau^*\frac{W_{1-\alpha}(T-T^*)}{T}+O_p(T^{1/p-\alpha}) \\
&= O(1)+O_p(T^{H-1})+O_p(T^{1/p-\alpha})=O_p(1). \qquad (4.4.31)
\end{aligned}$$

运用 (4.4.31), 我们得到

$$\hat{\tau}_T^2=\frac{N^{2H}}{NT^{2H}}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}R_i^2-\frac{N^{2H}T^{2-2H}}{N^2}\hat{\mu}_T^2=\frac{N^{2H}}{NT^{2H}}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}R_i^2+O_p(\frac{T^{2-2H}}{N^{2-2H}}).$$

接下来，我们记

$$W_i=\tau\Big\{W_{1-\alpha}(\frac{iT}{N})-W_{1-\alpha}(\frac{(i-1)T}{N})\Big\},\quad \eta_i=R_i-W_i-\mu\frac{T}{N},\quad 1\leqslant i\leqslant m^*,$$

以及

$$W_i^*=\tau^*\Big\{W_{1-\alpha}(\frac{iT}{N})-W_{1-\alpha}(\frac{(i-1)T}{N})\Big\},\quad \eta_i^*=R_i-W_i^*-\mu^*\frac{T}{N},\quad m^*<i\leqslant N.$$

这样可分解为

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant N}R_i^2 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant m^*}R_i^2+\sum_{m^*<i\leqslant N}R_i^2 \\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant m^*}\Big(\mu\frac{T}{N}+W_i+\eta_i\Big)^2+\sum_{m^*<i\leqslant N}\Big(\mu^*\frac{T}{N}+W_i^*+\eta_i^*\Big)^2.
\end{aligned}$$

运用引理 4.4.1 则可推出

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m^*}|\eta_i|=O_p(T^{1+1/p-\alpha}) \quad 以及 \quad \max_{m^*<i\leqslant N}|\eta_i^*|=O_p(T^{1+1/p-\alpha}).$$

因此

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*}\eta_i^2=O_p(m^*T^{2+2/p-2\alpha}) \quad 以及 \quad \sum_{m^*<i\leqslant N}\eta_i^{*2}=O_p((N-m^*)T^{2+2/p-2\alpha}). \qquad (4.4.32)$$

由于

$$(\frac{N}{T})^H\frac{1}{\tau}W_i \overset{\mathcal{D}}{\sim} N(0,1), \quad 1\leqslant i\leqslant m^*$$

以及

$$(\frac{N}{T})^H\frac{1}{\tau^*}W_i^* \overset{\mathcal{D}}{\sim} N(0,1), \quad m^*< i\leqslant N,$$

我们有

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*} W_i^2 = O_p(\tau^2 m^*(\frac{T}{H})^{2H}) \quad 及 \quad \sum_{m^*<i\leqslant N} W_i^{*2} = O_p(\tau^{*2}(N-m^*)(\frac{T}{N})^{2H}). \tag{4.4.33}$$

因此由 (4.4.32) 和 (4.4.33), 可得

$$\begin{aligned}\hat\tau_T^2 \ = \ & \frac{T^*T^{1-2H}}{N^{2-2H}}\Big\{O(1)+O_p((\frac{N}{T})^{2-2H})+O_p(\frac{N}{T^{\alpha-1/p}})\\ & +O_p((\frac{N}{T})^{1-H})+O_p(\frac{N}{T^{\alpha-1/p}})+O_p(\frac{N^{1/2+\alpha}}{T^{2\alpha-1/2-1/p}})\Big\}\\ & +\frac{(T-T^*)T^{1-2H}}{N^{2-2H}}\Big\{O(1)+O_p((\frac{N}{T})^{2-2H})+O_p(\frac{N}{T^{\alpha-1/p}})\\ & +O_p((\frac{N}{T})^{1-H})+O_p(\frac{N}{T^{\alpha-1/p}})+O_p(\frac{N^{1/2+\alpha}}{T^{2\alpha-1/2-1/p}})\Big\}+O_p(\frac{T^{2-2H}}{N^{2-2H}}).\end{aligned}$$

由于在 $1/2<\alpha<1$, $p>2$ 及 $p(1-\alpha)\leqslant 1$ 条件下, 有 $H=3/2-\alpha<1$, $\alpha-1/p\geqslant 1-2/p$ 以及 $(2\alpha-1/2-1/p)/(1/2+\alpha)\geqslant 1-2/p$. 那么

$$\begin{aligned}\hat\tau_T^2 \ = \ & \frac{T^*T^{1-2H}}{N^{2-2H}}\{O(1)+o_p(1)\}+\frac{(T-T^*)T^{1-2H}}{N^{2-2H}}\{O(1)+o_p(1)\}+O_p(\frac{T^{2-2H}}{N^{2-2H}})\\ = \ & O_p(\frac{T^{2-2H}}{N^{2-2H}}).\end{aligned} \tag{4.4.34}$$

最后综合条件 (4.4.19), (4.4.30) 以及 (4.4.34), 立即可得当 $T\to\infty$ 时, $\hat M_T \xrightarrow{P} \infty$.

定理 4.4.4 的证明 记 $\xi_i=(\frac{N}{T})^H(W_{1-\alpha}(\frac{iT}{N})-W_{1-\alpha}(\frac{(i-1)T}{N}))$, $1\leqslant i\leqslant N$. 容易得到 $\{\xi_i, 1\leqslant i\leqslant N\}$ 为标准正态随机变量. 运用引理 4.4.1 得

$$\widetilde R_i^2=\tau^2(\frac{T}{N})^{2H}\{\xi_i+\eta_i\}^2 \tag{4.4.35}$$

以及

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N}|\eta_i| = O_p(N^H T^{1/p-1/2}). \tag{4.4.36}$$

对任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned}
& P(\widetilde{M}_T > \epsilon) \\
= \; & P(\frac{N^H}{\tau^2 T^{2H}} \max_{1\leqslant m\leqslant N}|\widetilde{S}_m| > \epsilon) \\
= \; & P(\max_{1\leqslant m\leqslant N}\Big|\sum_{1\leqslant i\leqslant m}(\widetilde{R}_i^2 - \tau^2(\frac{T}{N})^{2H}) - \frac{m}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}(\widetilde{R}_i^2 - \tau^2(\frac{T}{N})^{2H})\Big| > \frac{\epsilon\tau^2 T^{2H}}{N^H}) \\
\leqslant \; & P(\max_{1\leqslant m\leqslant N}\sum_{1\leqslant i\leqslant m}(\widetilde{R}_i^2 - \tau^2(\frac{T}{N})^{2H}) > \frac{\epsilon\tau^2 T^{2H}}{2N^H}) \\
& + P(\max_{1\leqslant m\leqslant N}\frac{m}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}(\widetilde{R}_i^2 - \tau^2(\frac{T}{N})^{2H}) > \frac{\epsilon\tau^2 T^{2H}}{2N^H}) \\
\leqslant \; & 2P(\sum_{1\leqslant i\leqslant N}(\widetilde{R}_i^2 - \tau^2(\frac{T}{N})^{2H}) > \frac{\epsilon\tau^2 T^{2H}}{2N^H}) \\
= \; & 2P(\sum_{1\leqslant i\leqslant N}(\tau^2(\frac{T}{N})^{2H}\{\xi_i + \eta_i\}^2 - \tau^2(\frac{T}{N})^{2H}) > \frac{\epsilon\tau^2 T^{2H}}{2N^H}) \\
\leqslant \; & 2P(\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\tau^2(\frac{T}{N})^{2H}(\xi_i^2 - 1) > \frac{\epsilon\tau^2 T^{2H}}{6N^H}) + 2P(\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\tau^2(\frac{T}{N})^{2H}\eta_i^2 > \frac{\epsilon\tau^2 T^{2H}}{6N^H}) \\
& + 2P(\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\tau^2(\frac{T}{N})^{2H}\xi_i\eta_i > \frac{\epsilon\tau^2 T^{2H}}{3N^H}) =: 2(I_1 + I_2 + I_3).
\end{aligned}$$

和 (4.4.27) 同样的证明方法，可以得到

$$\mathsf{Var}(\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\xi_i^2) \sim N \vee N^{4H-2}.$$

那么对 $1/2 < H < 1$, 当 $N \to \infty$ 时,

$$I_1 =: P(\sum_{1 \leqslant i \leqslant N} (\xi_i^2 - 1) > \frac{\epsilon N^H}{6}) \leqslant \frac{CN \vee N^{4H-2}}{\epsilon^2 N^{2H}} = \frac{C}{\epsilon^2 N^{2H-1} \vee N^{2-2H}} \to 0. \tag{4.4.37}$$

注意到

$$I_2 =: P(\sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \eta_i^2 > \frac{\epsilon N^H}{6}) \leqslant P(\max_{1 \leqslant i \leqslant N} \eta_i^2 > \frac{\epsilon N^{H-1}}{6}).$$

由 (4.4.36) 及条件当 $T \to \infty$ 时, $N = o_p(T^{1/2-1/p})$, 我们有

$$I_2 =: P(\sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \tau^2 (\frac{T}{N})^{2H} \eta_i^2 > \frac{\epsilon \tau^2 T^{2H}}{6N^H}) \to 0, \quad 当 \ N \to \infty. \tag{4.4.38}$$

最后，对于 I_3 有

$$I_3 =: P(\sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \xi_i \eta_i > \frac{\epsilon N^H}{3}) \leqslant P(\max_{1 \leqslant i \leqslant N} |\eta_i| \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} |\xi_i| > \frac{\epsilon N^H}{3}).$$

这样由 (4.4.36), $\sum_{1 \leqslant i \leqslant N} |\xi_i| = O_p(N)$ 以及条件当 $T \to \infty$ 时, $N = o_p(T^{1/2-1/p})$, 可得

$$I_3 =: P(\sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \tau^2 (\frac{T}{N})^{2H} \xi_i \eta_i > \frac{\epsilon \tau^2 T^{2H}}{3N^H}) \to 0, \quad 当 \ N \to \infty. \tag{4.4.39}$$

因此，综合 (4.4.37), (4.4.38) 以及 (4.4.39), 得到当 $N \to \infty$ 时, $P(\widetilde{M_T} > \epsilon) \to 0$.

定理 4.4.5 的证明 由 (4.4.24) 有

$$\hat{\mu}_T - \mu = O_p(T^{1/2-\alpha}). \tag{4.4.40}$$

接着，注意到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant i\leqslant m}(\widetilde{R}_i^2-\hat{R}_i^2)\\
=&\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{(S_i-S_{i-1}-\frac{\mu T}{N})^2-(S_i-S_{i-1}-\frac{\hat{\mu}_T T}{N})^2\right\}\\
=&\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{(\frac{T}{N})^2(\mu^2-\hat{\mu}_T^2)-2S_i\frac{T}{N}(\mu-\hat{\mu}_T)+2S_{i-1}\frac{T}{N}(\mu-\hat{\mu}_T)\right\}\\
=&\frac{2T}{N}(\hat{\mu}_T-\mu)S(\frac{mT}{N})-m(\frac{T}{N})^2(\hat{\mu}_T-\mu)(\hat{\mu}_T+\mu).
\end{aligned}
$$

因此由定理 4.4.1 以及 (4.4.40), 得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{N^H}{T^{2H}}\max_{1\leqslant m\leqslant N}|\widetilde{S}_m-\hat{S}_m|\leqslant\frac{2N^H}{T^{2H}}\max_{1\leqslant m\leqslant N}\Big|\sum_{1\leqslant i\leqslant m}(\widetilde{R}_i^2-\hat{R}_i^2)\Big|\\
=&\ O_p(N^{H-1}T^{1/p-1/2})+O_p(N^{H-1}T^{2/p-1})=o_p(1). \qquad (4.4.41)
\end{aligned}
$$

那么运用 (4.4.23), 那么由 (4.4.41) 及定理 4.4.4, 结论成立.

定理 4.4.6 的证明 首先注意到由于 $\mu^*=\mu$, 则在 H_2 的假设下, (4.4.40) 成立. 由于 $m^*=[\frac{NT^*}{T}]$, 和定理 4.4.5 相同的证明, 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{N^H}{T^{2H}}|\hat{S}_{m^*}|\\
=&\frac{N^H}{T^{2H}}\Big|\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*}\hat{R}_i^2-\frac{m^*}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\hat{R}_i^2\Big|\\
=&\frac{N^H}{T^{2H}}\Big|\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*}\left(S_i-S_{i-1}-\frac{\hat{\mu}_T T}{N}\right)^2-\frac{m^*}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\left(S_i-S_{i-1}-\frac{\hat{\mu}_T T}{N}\right)^2\Big|\\
=&\frac{N^H}{T^{2H}}\Big|\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*}(S_i-S_{i-1})^2-\frac{m^*}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}(S_i-S_{i-1})^2\\
&-\frac{2\hat{\mu}_T T}{N}\Big\{\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*}(S_i-S_{i-1})-\frac{m^*}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}(S_i-S_{i-1})\Big\}\Big|.
\end{aligned}
$$

令 $H_i = \sum_{1\leqslant j\leqslant \frac{iT}{N}} e_j - \sum_{1\leqslant j\leqslant \frac{(i-1)T}{N}} e_j$, 那么

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*}(S_i - S_{i-1})^2 - \frac{m^*}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}(S_i - S_{i-1})^2 \\
= &\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*}(\frac{\mu T}{N} + \sigma H_i)^2 - \frac{m^*}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*}(\frac{\mu T}{N} + \sigma H_i)^2 \\
&-\frac{m^*}{N}\sum_{m^*<i\leqslant N}(\frac{\mu T}{N} + \sigma^* H_i)^2 \\
= &\frac{2\mu T}{N}\sigma(1-\frac{m^*}{N})\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*} H_i - \frac{2\mu T}{N}\sigma^*\frac{m^*}{N}\sum_{m^*\leqslant i\leqslant N} H_i \\
&+\sigma^2(1-\frac{m^*}{N})\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*} H_i^2 - \sigma^{*2}\frac{m^*}{N}\sum_{m^*<i\leqslant N} H_i^2
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*}(S_i - S_{i-1}) - \frac{m^*}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}(S_i - S_{i-1}) \\
= &\sigma(1-\frac{m^*}{N})\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*} H_i - \sigma^*\frac{m^*}{N}\sum_{m^*<i\leqslant N} H_i.
\end{aligned}$$

由定理 4.4.4, 引理 4.4.1 及 (4.4.40), 有

$$\begin{aligned}
&\frac{N^H}{T^{2H}}|\hat{S}_{m^*}| \\
= &\Big|\frac{2T^{1-2H}}{N^{1-H}}\sigma(\mu-\hat{\mu}_T)(1-\frac{m^*}{N})\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*} H_i - \frac{2T^{1-2H}}{N^{1-H}}\sigma^*(\mu-\hat{\mu}_T)\frac{m^*}{N}\sum_{m^*<i\leqslant N} H_i \\
&+\frac{N^H}{T^{2H}}\sigma^2(1-\frac{m^*}{N})\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*} H_i^2 - \frac{N^H}{T^{2H}}\sigma^{*2}\frac{m^*}{N}\sum_{m^*<i\leqslant N} H_i^2\Big|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= O_p(N^{H-1}) + \Big|\frac{N^H}{T^{2H}}\sigma^2\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*} H_i^2 - \frac{m^*}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant N} H_i^2\Big)\Big| \\
&\quad + \Big|\frac{N^H}{T^{2H}}(\sigma^2 - \sigma^{*2})\frac{m^*}{N}\sum_{m^*<i\leqslant N} H_i^2\Big| \\
&= o_p(1) + \frac{N^H}{T^{2H}}\Big|\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*}\widetilde{R}_i^2 - \frac{m^*}{N}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\widetilde{R}_i^2\Big| \\
&\quad + \frac{N^H}{T^{2H}}|\sigma^2 - \sigma^{*2}|\frac{m^*}{N}K_\alpha^2(\frac{T}{N})^{2H}\sum_{m^*<i\leqslant N}\Big(N_i^2 + O_p\big(N^{2H}T^{2/p-1}\big)\Big)\ (\widetilde{R}_i = \sigma H_i) \\
&= o_p(1) + \frac{|\tau^2 - \tau^{*2}|m^*}{N^{1+H}}\sum_{m^*<i\leqslant N}\big(N_i^2 + o_p(1)\big),
\end{aligned}
$$

其中 $N_i, 1 \leqslant i \leqslant N$ 为标准正态变量. 与 (4.4.26) 相同，可以证明

$$
\frac{1}{N - m^*}\sum_{m^*<i\leqslant N}(N_i^2 - 1) = o_p(1).
$$

因此得到结论

$$
\frac{N^H}{T^{2H}}|\hat{S}_{m^*}| = \frac{|\tau^2 - \tau^{*2}|m^*(N - m^*)}{N^{1+H}}\big(1 + o_p(1)\big). \tag{4.4.42}
$$

此外由 (4.4.40),

$$
\begin{aligned}
\hat{\tau}_T^2 &= \frac{N^{2H}}{NT^{2H}}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\Big(S_i - S_{i-1} - \hat{\mu}_T\frac{T}{N}\Big)^2 \\
&= \frac{N^{2H}}{NT^{2H}}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\Big(S_i - S_{i-1} - \mu\frac{T}{N}\Big)^2 - \frac{T^{2-2H}}{N^{2-2H}}(\hat{\mu}_T - \mu)^2 \\
&= \frac{N^{2H}}{NT^{2H}}\Big(\sigma^2\sum_{1\leqslant i\leqslant m^*} H_i^2 + \sigma^{*2}\sum_{m^*<i\leqslant N} H_i^2\Big) + O_p(N^{2H-2}) \\
&= \frac{N^{2H}}{NT^{2H}}\Big(m^*\sigma^2K_\alpha^2(\frac{T}{N})^{2H} + (N - m^*)\sigma^{*2}K_\alpha^2(\frac{T}{N})^{2H}\Big)(1 + o_p(1)) + o_p(1) \\
&= \Big(\tau^2\frac{m^*}{N} + \tau^{*2}\frac{N - m^*}{N}\Big)(1 + o_p(1)).
\end{aligned}
$$

由 (4.4.19) 及 (4.4.42) 结论成立.

参考文献

[1] 白志东, 苏淳. 关于独立和的完全收敛性. 中国科学 A 辑, 1985, **5**: 399-412.

[2] Bai, J. Least squares estimation of a shift in linear processes. *J. Time Ser Anal.*, 1994, **15**: 453-472.

[3] Bai, J., Perron, P. Estimating and tesing linear models with multiple structural changes. *Econometrica*, 1998, **66**: 47-78.

[4] Bhattacharya, P.K. Maximum likelihood estimation of a change-point in the distribution of independent random variables: general multiparameter case. *J. of Multivariate Anal.*, 1987, **23**: 183-208.

[5] Billingsley, P. Convergence of Probability Measures. Wiley, New York, 1968.

[6] Birkel, P. A functional central limit theorem for positively dependent random variables. *J. Multi. Anal.*, 1993, **44**: 314-320.

[7] Bradley, R.C. Equivalent mixing conditions for random fields. *Ann. Probab.*, 1993, **21**: 1921-1926.

[8] Brodsky, B., Darkhovsky, B. Nonparametric Methods in Change-Point Problems. Kluwer Academic Publishers, the Netherlands, 1993.

[9] Burton, R.M., Dehling, H. Large deviations for some weakly dependent random process. *Statist. Probab. Lett.*, 1990, **9**: 397-401.

[10] Chen, R. A remark on the tail probability of a distribution. *J. Multivariate Anal.*, 1978, **8**: 328-333.

[11] Chow, Y.S. On the rate of moment convergence of sample sums and extremes. *Bull. Inst. Math Academia Sinica*, 1988, **16**: 177-201.

[12] Csőrgö, M., Horváth, L. Limit Theorems in Change-point Analysis. Wiley, Chichester, 1997.

[13] Davis, R.A., Huang, D., Yao, Y.C. Testing for a change in the parameter values and order of an autoregressive model. *Ann. Statist.*, 1995, **23**: 283-304.

[14] Epps, T. Testing that a Gaussian process is stationary. *Ann. Statist.*, 1988, **16**: 1667-1683.

[15] Fakhre-Zakeri, I., Lee, S. A random functional central limit theorem for stationary linear processes generated by matingales. *Statist. Probab. Lett.*, 1997, **35**:417-422.

[16] Gut, A., Spătaru, A. Precise asymptotics in the Baum-Katz and Davis laws of large numbers. *Jour. Math. Anal. Appl.*, 2000a, **248**:233-246.

[17] Gut, A., Spătaru, A. Precise asymptotics in the law of the iterated logarithm. *Ann. Probab.*, 2000b, **28**:1870-1883.

[18] Hall, P. Convergence rates in the central limit theorem for means of autoregressive and moving average sequences. *Stochastic Process. Appl.*, 1992, **43**: 115-131.

[19] Hawkins, D.M. Testing a sequence of observations for a shift in location. *J. Ann. Statist. Assoc.*, 1977, **72**: 180-186.

[20] Herrndorf, N. A functional cintral limit theorem for weakly dependent sequence of random variables. *Ann. Probab.*, 1984, **12**:141-153

[21] Herrndorf, N. A functional central limit theorem for strong mixing sequence of random variables. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 1985, **69**: 541-550

[22] Hidalgo, J., Robinson, P.M. Testing for structural change in a long memory environment. *J. Economet.*, 1996, **70**: 159-174.

[23] Hinkley, D. Inference about the change point in a sequence of random variables. *Biometrika*, 1970, **57**: 1-17.

[24] Hinkley, D., Hinkley, E. Inference about the change point in a sequence of random variables. *Biometrika*, 1970, **57**: 477-488.

[25] Horváth, L. Change in autoregressive processes. Stochastic process. *Stochastic Process. Appl.*, 1993, **44**: 221-242.

[26] Horváth, L. Detection of changes in linear sequences. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 1997, **49**: 271-283.

[27] Horváth, L., Steinebach, J. Testing for changes in the mean or variance of a stochastic process under weak invariance. *J. Statist. Plann. Inference*, 2000, **91**: 365-376.

[28] Karatzas, I., Shreve, S.E. Brownian Motian and stochastic Calculus. Springer-Verlag, New York, 1988.

[29] James, B., James, K., Siegmund, D. Tests for a change point. *Biometeika*, 1987, **74**: 71-83.

[30] 蒋烨. 随机序列的精确收敛性. 博士论文, 2004.

[31] Kim, T.S., Baek, J.I. A central limit theorem for stationary linear processes generated by linearly positively quadrant-dependent process. *Statist. Probab. Lett.*, 2001, **51**: 299-305.

[32] Kuan, C.M., Hsu, C.C. Change-point estimation of fractionally integrated processes. *J. Time Ser Anal*, 1998, **19** :693-708.

[33] Lavielle, M. Detection of multiple changes in a sequence of dependent variables. *Stoc. Proc. and their Appl.*, 1999, **83**: 79-85.

[34] Lavielle, M., Moulines, E. Least Squares estimation of an unknown number of shifts in a time series. *J. Time Se.r Anal.*, 2000, **21**: 33-59.

[35] Li, D.L., Rao, M.B., Wang, X.C. Complete convergence of moving average processes. *Statist. Probab. Lett.*, 1992a, **14**:111-114.

[36] Li, D.L., Wang, X.C., Rao, M.B. Some results on convergence rates for probabilities of moderate deviations for sums of random variables. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1992b, **15**: 481-498.

[37] Liang, H.Y. Complete convergence for weighted sums of negatively associated random variables. *Statist. Probab. Lett.*, 2000, **48**:317-325.

[38] 林正炎，李坚高．随机过程序列部分和的收敛性的注记． *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A*, 2002, **17**: 253-256.

[39] 林正炎，陆传荣，苏中根．概率极限理论基础．高等教育出版社， 1999.

[40] Lombard, F. Rank tests for change point problems. *Biometrika*, 1987, **74**:615-624.

[41] 陆传荣，林正炎．混合相依变量的极限理论．科学出版社， 1997.

[42] Lu, C.R. The invariance principle for linear processes generated by a negatively associated sequence and its applications. *Acta Math. Appl. Sinica, English Series*, 2003, **19(4)**: 641-646.

[43] Mandelbrot, B.B., van Ness, J.W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 1968, **10**: 423-437.

[44] Mia, B., Zhao, L. Detection of change points using rank methods. *Comm. Statist. Theory Methods*, 1988, **17**: 3207-3217.

[45] Móricz, F. A general moment inequlity for the maximum of partial sums of single series. *Acta Sci.Math.*, 1982, **44**: 67-75.

[46] Newman, C.M., Wright, A. L. An invariance principle for certain dependent sequence. *Ann. Probab.*, 1981, **9**: 671-675.

[47] Peligrad, M. On the asymptotic normality of weak dependent random variables. *J. Theor. Probab.*, 1996, **9**: 703-715.

[48] Petrov, V.V. Limit Theorem of Probability Theory. Oxford University Press, London, 1995.

[49] Picard, D. Testing and estimating change-points in time series. *J. Applied Prob.*, 1985, **14**: 411-415.

[50] Picard, D., Testing and estimating change-points in times series. *Adv. Appl. Probab.*, 1985, **17**: 467-481.

[51] Schechtman, E., Wolfe, D. Multiple change points problem–nonparametric procedures for estimation of the points of change. *Comm. Statist. Simul. Comput.*, 1985, **14**: 615-613.

[52] Schwarz, G. Estimating the dimension of a model. *Ann. Statist.*, 1978, **6**: 461-464.

[53] Sen, A., Srivastava, M. S. On tests for detecting change in mean. *Ann. Statist.*, 1975a, **3**: 96-103.

[54] Sen, A., Srivastava, M. S. Some one-sided tests for change in level. *Technometrics*, 1975b, **17**: 61-64.

[55] Shao, Q.M. A moment inequality and its application. *Acta Math. Sinica*, 1988, **31**: 736-747 (in Chinese).

[56] Shao, Q.M. On the invariance principle for ρ-mixing sequence of random variables. *Chinese Ann. Math.*, 1989, **10(B)**: 427-433.

[57] Shao, Q.M. Almost sure invariance principles for mixing sequences of random variables. *Stochastic Processes Appl.*, 1993, **48**: 319-334.

[58] Shao, Q.M. On the invariance principle for ρ-mixing sequence. *Ann. Probab.*, 1995, **23**: 948-965.

[59] Shao, Q.M. Maximal inequality for partial sums of ρ-mixing sequence. *Ann. Probab.*, 1995, **23**: 948-965.

[60] Shao, Q.M., Yu, H. Weighted weak convergence for empirical processes of dependent sequence. *Ann. Probab.*, 1996, **24**: 2098-2127.

[61] Shao, Q.M. A comparison theorem on maximum inequalities between negatively associated and indepensent random variables. *J. Theor. Probab.*, 2000, **13**: 343-356.

[62] Srevastava, M.S., Worsley, K.J. Likeihood ratio tests for a change in the multivariate normal mean. *J. Ann. Statist. Assoc.*, 1986, **81**: 199-204.

[63] Su, C., Zhao, L.C., Wang, Y.B. The moment inequalities and weak convergence for negatively associated sequences. *Science in China*, 1997, **40A**: 172-182.

[64] Tae-Sung Kim, Jong-Il Baek. A central limit theorem for stationary linear processes generated by linear positively quadrant-dependent process. *Statist. Probab. Lett.*, 2001, **51**: 299-305.

[65] Vostrikova, L. Detecting "disorder" in multidimensional random processes. *Soviet. Math. Dokl.*, 1981, **24**: 55-59.

[66] Wang, Q.Y., Lin, Y.X., Gulati, C.M. Strong approximation for long memory processes with applications. *J. Theore. Probab.*, 2003, **16**: 377-389.

[67] Wright, J.H. Testing for a structural break at unknown date with long-memory disturbances. *J. Time Ser. Anal.*, 1998, **19**: 369-376.

[68] Worsley, K.J. On the likelihod ratio test for a shift in locations of normal populations. *J. Ann. Statist. Assoc.*, 1979, **72**: 180-186.

[69] Worsley, K.J. Confidence regions and tests for a change-point in sequence of exponential family random variables. *Biometrika*, 1986, **73**: 91-104.

[70] 肖庆宪，郑祖康．随机过程序列部分和的收敛性．数学年刊， 1999, **20A**: 177-182.

[71] Yang, X.Y. The law of the iterated logarithm and stochastic index central limit theorem of B-valued stationary linear processes. *Chin. Ann. of Math.*, 1996, **17A**: 703-714.

[72] Yao, Y. C. Approximating the distribution of the ML estimate of the change-point in a sequence of independent r.v.'s. *Ann. Statist.*, 1987, **3**: 1321-1328.

[73] Yao, Y. Estimating the number of change-points via Schwarz criterion. *Statist. Probab. Lett*, 1988, **6**: 181-189.

[74] Yu, D.M., Wang, Z.J. Complete convergence of moving average processes under negative dependence assumptions. *Math. Appl. (Wuhan)*, 2002, **15**: 30-34.

[75] Zhang, L.X. Complete convergence of moving average processes under dependence assumptions. *Statist. Probab. Lett.*, 1996, **30**: 165-170.

[76] Zhang, L.X. A functional central limit theorem for asymptotically negatively dependent random fields. *Acta. Math. Hungar.*, 2000a, **86**: 237-259.

[77] Zhang, L.X. Central limit theorems for asymptotically negatively associated random fields, *Acta. Math. Sinica.*, 2000b, **16**: 691-710.

[78] Zhang, L.X., Wen, J.W. A weak convergence for negatively associated fields. *Statist. Probab. Lett.*, 2001a, **53**: 259-267.

[79] Zhang, L.X. Precise rates in the law of the iterated logarithm. Manuscript, 2001b.

[80] 张立新. NA 序列重对数律的几个极限定理. 数学学报, 2004, **47(3)**: 541-552.